

# ВЕСТНИК



**Х**арьковского  
**Г**осударственного  
**П**олитехнического  
**У**ниверситета

---

Часть 2.

Механика.  
Машиностроение.

---

ВЫПУСК 7.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

# ВЕСТНИК

**Харьковского  
государственного  
политехнического  
университета**

Выпуск 7

Часть 2. Механика. Машиностроение

Основан в 1984 г.

Харьков  
ХГПУ  
1997

что совпадает с результатом, приведенным в [2] для круга. В противоположном случае, когда высота сегмента мала (при этом  $\theta_0 \approx \pi$ ), целесообразно использовать (4).

Указанные представления (3) и (4) дают возможность рассмотреть нестационарные колебания прямоугольных многослойных пластин [1] под действием нагрузки, распределенной по круговому сегменту.

**Список литературы:** 1. Шушков А. Н., Сметанкина Н. В. Колебания многослойных пластин при кратковременных интенсивных воздействиях // Пробл. машиностроения. — 1992.— Вып. 38. — С. 17 — 22. 2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. — М.: Физматгиз, 1963.— 635 с. 3. Агрест М. М., Максимов М. 3. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. — М: Атомиздат, 1965.— 350 с.

Поступила в редколлегию 12.04.97

*Л. М. Ульев, канд. техн. наук*

## МЕДЛЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КОАКСИАЛЬНЫХ КОНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ

В последние годы значительно увеличилось техническое значение течений высоковязких жидкостей, в частности при переработке и производстве пластмасс и изделий из них. В большинстве конструкций экструзионных прессформ, фильерных, кабельных и трубных головок [1,2] существует участок, где течение происходит между коническими поверхностями (рис. 1).

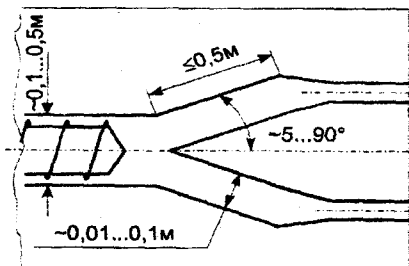


Рис. 1. Поперечный разрез типичной фильерной головки

Для выбора оптимальных технологических и конструктивных параметров процессов экструзии необходимо создать надёжные, научно обоснованные методы расчёта параметров течения в каналах экструзионных головок, напорно-расходной характеристикой которых определяется рабочая точка экструдера [1].

В пределах изменения параметров переработки расплавы некоторых

полимеров ведут себя как ньютоновские жидкости [3]. Для практически интересных расходов таких жидкостей  $Q \approx 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$ , их реофизических свойств  $m \sim 10^3 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $\gamma \sim 250 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $l \sim 0,2 \text{ Вт}/\text{м}\cdot\text{К}$ ,  $\Delta T_{\text{теол}} \sim 6^\circ \text{ К}$  [4] и геометрических размеров (рис. 1) число Нема-Гриффита [4,5]  $Gn \ll 1$ , число Рейнольдса  $Re \ll 1$ .

Величина числа  $Gn$  показывает, что диссипативные эффекты не влияют на динамику течения и ими можно пренебречь, а это вместе с хорошим термостатированием экструдеров [2] позволяет течение в кольцевых конических каналах рассматривать как изотермическое.

При рассмотрении ламинарного течения между соосными конусами с общей вершиной в [6] получено аналитическое решение для общего случая с учётом инерционных членов в уравнениях движения, но в виде, затрудняющем его использование для практических расчётов. В [7] получено общее решение для сферических течений без учёта граничных условий. В работе [8] методом конечных элементов исследуется течение нелинейно-вязкой жидкости в коаксиальном коническом канале постоянной ширины. Здесь по заданному перепаду давления определяются поле скорости и расход, но в инженерной практике, как правило, требуется решение обратной задачи. В [2,9] предлагается для расчёта конических течений использовать ступенчатую аппроксимацию цилиндрическими каналами, что может привести к значительным ошибкам.

Сделанные выше оценки позволяют получить простые выражения для расчета течений между круглыми коническими поверхностями в широком диапазоне изменения геометрических параметров, учитывающие форму канала.

Сначала рассмотрим течение между соосными конусами с общей вершиной. Малое число Рейнольдса позволяет упростить уравнения движения и, следуя [4], записать их, учитывая аксиальную симметричность течения, в виде:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial R} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial V_R}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial V_R}{\partial \theta} \right) - \frac{2V_R}{R^2}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{2}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \theta}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 V_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) = 0, \quad (3)$$

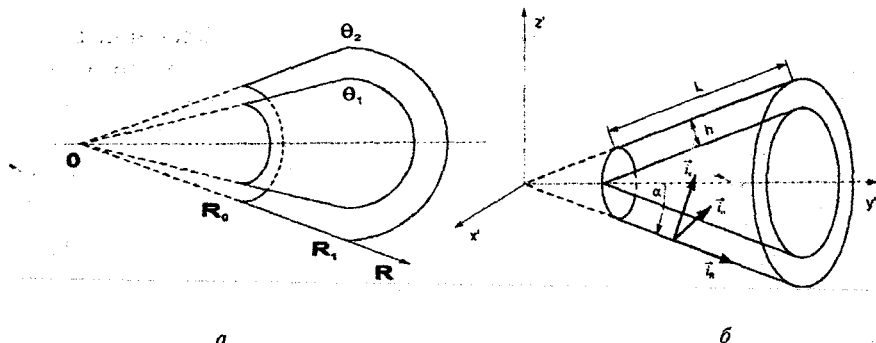
с граничными условиями для соосных конусов с общей вершиной (рис. 2а):

$$V_R = 0, \quad V_\theta = 0, \quad \theta = \theta_1, \quad (4)$$

$$V_R = 0, \theta = \theta_2, \quad (5)$$

$$\bar{P} = 0, R = R_1, \quad (6)$$

$$\text{где } \bar{P}(R) = \frac{1}{\cos \theta_1 - \cos \theta_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} P(R, \theta) \sin \theta d\theta.$$



a

b

Рис. 2. Геометрия конического зазора:

a — конусы с общей вершиной.  $R, R_1, R_2$  — радиальная координата и координаты входа и выхода из канала или наоборот, м;  $q_1, q_2$  — углы раскрытия конусов, град; б — конусы, не имеющие общей вершины,  $L$  — длина конической части канала, м;  $h$  — ширина зазора, м;  $\hat{i}_R, \hat{j}_S, \hat{k}_S$  — орты в биконической системе координат

Для углов раскрытия конусов  $\Delta_0 < 30^\circ$  уравнение неразрывности (3) позволяет сделать оценку угловой составляющей скорости  $V_0 \sim \theta V_R$ , т.е.  $V_0 = o(V_R)$ , и пренебречь ею в уравнениях движения и неразрывности. Решение системы уравнений (1-6) в безразмерных переменных

$$\xi = \frac{R}{r_0}, \quad v = \frac{V_R}{V_0}, \quad \Pi = \frac{(P - P_0)r_0}{\mu V_0}, \quad \tau = \cos \theta, \quad V_0 = \frac{Q}{2\pi R_0^2 (\tau_1 - \tau_2)} \quad (7)$$

запишем в виде:

$$u = \frac{\lambda}{6} (A \cdot P_2(\tau) + B \cdot Q_2(\tau) - 1), \quad (8)$$

где

$$A = \frac{Q_2(\tau_2) - Q_2(\tau_1)}{P_2(\tau_1)Q_2(\tau_2) - P_2(\tau_2)Q_2(\tau_1)},$$

$$B = \frac{P_2(\tau_2) - P_2(\tau_1)}{P_2(\tau_1)Q_2(\tau_2) - P_2(\tau_2)Q_2(\tau_1)}, \quad C = \frac{A}{2} (\tau_2^2 + \tau_2\tau_1 + \tau_1^2 - 1),$$

$$\lambda = \frac{6\xi_1^2}{C + B \left[ \frac{\tau_2(\tau_2^2 - 1)}{\tau_1 - \tau_2} \ln \frac{1 + \tau_2}{1 - \tau_2} - \frac{\tau_1(\tau_1^2 - 1)}{\tau_2 - \tau_1} \ln \frac{1 + \tau_1}{1 - \tau_1} - 2(\tau_2 + \tau_1) \right] - 1},$$

$$\bar{\Pi}(\xi) = \frac{\lambda + 6\xi_0^2}{3} \left( \frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi_0^3} \right), \quad (9)$$

а  $P_1(\tau) = 0.5(3\tau^2 - 1)$ ,  $Q_1(\tau) = \frac{1}{2}P_1(\tau) \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} - \frac{3}{2}\tau$  - многочлены Лежандра первого и второго рода и второго порядка,  $\bar{\Pi}$  - среднее по поперечному сечению канала давление.

Заметим, что если  $\theta_2 = \pi/2$ , то мы получим решение для медленного осесимметричного радиального течения между плоскостью и конусом с вершиной, лежащей на плоскости, и осью перпендикулярной к ней.

Течение между соосными конусами с общей вершиной является частным случаем течения в распределительных устройствах экструзионных головок. Кольцевые конические каналы могут быть образованы концентрическими поверхностями с постоянным расстоянием между ними или с произвольным законом изменения ширины зазора. Поэтому для выбора оптимальных конструктивных и технологических параметров необходимо исследовать течение между соосными конусами, не имеющими общей вершины.

Проанализируем течение в конусном кольцевом канале постоянной ширины (рис. 26). Параметры жидкости и основные геометрические размеры устройств формования аналогичны приведенным выше. Поэтому течение жидкости можно рассматривать как изотермическое, а в уравнениях движения пренебрегать инерционными членами. Течение в таком канале удобно исследовать в биконических координатах [10], вершина которых совпадает с вершиной внешней конической поверхности (рис. 26), и определяемых преобразованиями:

$$z = R \cos \alpha + X \sin \alpha, \quad (10)$$

$$y = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \sin \varphi = \Omega \times \sin \varphi, \quad (11)$$

$$x = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \cos \varphi = \Omega \times \cos \varphi. \quad (12)$$

Вычисляя коэффициенты Ламэ  $H_x = 1$ ,  $H_R = 1$ ,  $H_\varphi = W$  и следуя [11], запишем уравнения неразрывности и движения в выбранных координатах.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial R}(\Omega V_R) + \frac{\partial}{\partial X}(\Omega V_X) = 0. \quad (13)$$

Отсюда получим оценку соотношения между величинами  $V_x$  и  $V_R$ ,  $V_x \approx 2V_R h/L$ , т.е.  $V_x = o(V_R)$ , что позволяет систему уравнений гидродинамики в безразмерных переменных

$$\xi = R/r_0, \quad \chi = x/\rho_0, \quad V_0 = Q/(\pi r_0^2), \quad v = V_R/V_0, \quad P = (P - P_0)r_0/\mu V_0 \quad (14)$$

записать в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sigma \frac{\partial v}{\partial \chi} \right), \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} = \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sigma^2} v, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\sigma v) = 0, \quad (17)$$

где  $\sigma = \xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha$ .

В практически интересных случаях всегда выполняется условие  $\xi g a \gg \chi$ , т.е. мы можем положить  $\sigma \approx \xi \sin \alpha$ , и тогда получим  $\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \approx \frac{v}{\chi_0}$ ,  $\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} \approx \frac{v}{\xi g a}$ , т.е. можно положить, что  $\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} = 0$ , и редуцировать систему уравнений (15,16) к одному уравнению

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}. \quad (18)$$

Граничными условиями являются условие прилипания и заданное давление на входе в канал:

$$u = 0, \quad \chi = 0, \quad (19)$$

$$u = 0, \quad \chi = \chi_0, \quad (\chi_0 = h/r_0), \quad (20)$$

$$\Pi = 0, \quad \xi = \xi_0, \quad (21)$$

а уравнение неразрывности учтём с помощью условия постоянства расхода

$$\int_0^{\chi_0} (\xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha) v d\chi = 0.5. \quad (22)$$

Решением системы (18-22) являются выражения:

$$v = \frac{6(\chi^2 - \chi_0 \chi)}{\chi_0^3 (\chi_0 \cos \alpha - 2\xi \sin \alpha)}, \quad (23)$$

$$\Pi = -\frac{6}{\chi_0^3 \sin \alpha} \ln \frac{\chi_0 - 2\xi g a}{\chi_0 - 2\xi_0 g a} \quad (24)$$

Интересно отметить два предельных случая данного решения:

1. При  $\alpha \rightarrow 90^\circ$  получаем выражение для определения перепада давления при радиальном течении между параллельными плоскостями

$$\Pi = -\frac{6}{\chi_0^3} \ln \frac{\xi}{\xi_0}, \quad (25)$$

2. При  $\chi_0/\xi_0 \ll 1$  получаем выражение для перепада давления в узких конических щелях [12]

$$\Pi = -\frac{6}{\chi_0^3 \sin \alpha} \ln \frac{\xi}{\xi_0}, \quad (26)$$

которое при малых углах раскрытия может привести к значительным погрешностям, т.к. величина  $\chi_0$  может стать сравнимой с радиусом кривизны канала.

В тех случаях, когда ширина зазора не постоянна вдоль течения, например образующая внутренней поверхности определяется, как  $\chi_0 = f(\xi)$ , мы можем для расчёта перепада давления применить ступенчатую аппроксимацию:

$$\Pi = -\frac{6}{\sin \alpha} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\chi_{0i}^3} \ln \frac{\chi_{0i} - 2\xi_{i+1} \operatorname{tg} \alpha}{\chi_{0i} - 2\xi_i \operatorname{tg} \alpha}, \quad (27)$$

где  $\xi_{i+1} = \xi_0 + \frac{\xi_N}{N}(i-1)$ ,  $\chi_{0i} = f(\xi_i)$ ,  $N$  - число ступеней,  $\xi_0$  - координата входа,  $\xi_N$  - координата выхода. Если функция  $f(\xi)$  неизвестна, мы можем использовать её аппроксимационное представление.

Аналогично можно записать выражение для расчёта перепада давления в осесимметричном кольцевом канале переменного сечения с произвольной формой образующей канала:

$$\Pi = -6 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\chi_{0i}^3 \sin \alpha_i} \ln \frac{\chi_{0i} - 2\xi_{i+1} \operatorname{tg} \alpha_i}{\chi_{0i} - 2\xi_i \operatorname{tg} \alpha_i}, \quad (28)$$

где все индексированные величины определяются для каждого участка канала.

Заметим, что данная аппроксимация учитывает геометрические особенности канала и не заменяет сходящееся или расходящееся коническое течение прямолинейным течением.

Кроме того, если в (27) положить  $\alpha = 90^\circ$ , мы получим совместно с (23) приближённые выражения для расчёта медленного радиального течения между плоскостью и конусом с произвольно расположенной вершиной.

В [2,9] перепад давления в коническом кольцевом канале предлагается рассчитывать с помощью ступенчатой аппроксимации канала коаксиальными цилиндрами. Применяя такой подход к каналу постоянной ширины, получим, следуя [9], зависимость

$$\Delta P = -12 \frac{\xi_1 - \xi_0}{N \chi_0} (\cos \alpha)^4 \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\xi_i \sin \alpha - \chi_0 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (29)$$

Сравнение результатов расчёта перепада давления в коническом кольцевом канале с постоянной шириной зазора при значениях  $\chi_0 = 3.33$ ,  $\xi_0 = 280$ ,



$\xi_1 = 400$ , по (24) и (29), показывает значительное различие, особенно при углах раскрытия  $\alpha > 30^\circ$  (рис. 3). Применение ступенчатой аппроксимации к течению между конусами с общей вершиной даёт ещё большее расхождение с результатами, полученными с помощью (9).

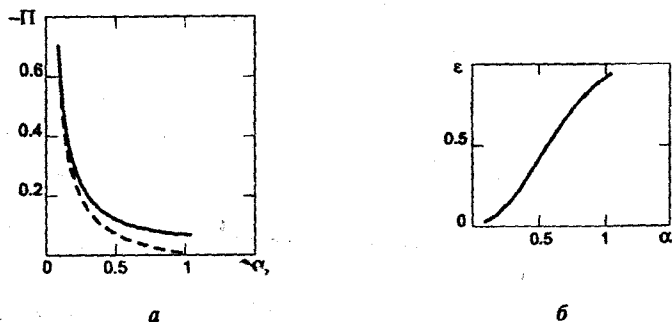


Рис. 3. Зависимости для конического кольцевого канала с постоянной шириной зазора от угла раскрытия:

*a* — безразмерного перепада давления в канале: сплошная линия — расчёт по (24), штриховая — по (29) при  $N = 60$ ; *b* — относительной ошибки для указанных величин

Результаты, полученные с помощью (27), в этом случае показывают хорошую сходимость с зависимостью (9), которая в переменных (14) запишется как

$$\bar{\Pi} = \frac{\lambda + 6\xi_0^2}{6\xi_0^2(\tau_1 - \tau_2)} \left( \frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi_0^3} \right). \quad (30)$$

для значений  $\theta_1 = 10.91^\circ$ ,  $\theta_2 = 15^\circ$ ,  $\xi_0 = 280$ ,  $\xi_1 = 400$  (рис. 4.), а также, во всём диапазоне изменения параметров.

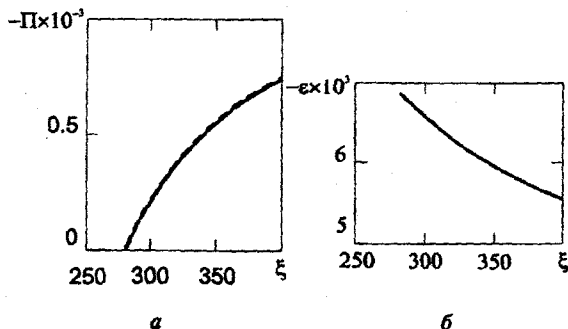


Рис. 4. Зависимости для конического кольцевого канала, образованного конусами с общей вершиной от безразмерного радиуса:

*a* — безразмерного перепада давления в канале: сплошная линия — расчёт по (9), штриховая — по (27) при  $N = 60$ ; *b* — относительной ошибки для указанных величин

Проанализируем зависимость перепада давления в распределительном устройстве экструзионной головки от угла раскрытия коаксиального конического канала постоянной ширины в случае, когда диаметр шнекового канала не изменяется, т.е. изменение  $\alpha$  происходит при вращении образующих канала вокруг точки А (рис. 5 а) при параметрах  $l = 120$ ,  $\chi_0 = 40$ ,  $\rho_1 \approx 72.5$ . С помощью (24) получим:

$$\Delta\Pi = -\frac{6}{\chi_0^3 \sin \alpha} \ln \left| 1 - \frac{2l \sin \alpha}{\chi_0 \cos \alpha - 2\rho_1} \right|. \quad (31)$$

Рассмотрим также случай, когда постоянным остаётся начальный радиус внутренней поверхности канала, т.е. изменение  $\alpha$  происходит при вращении образующих относительно точки В (рис. 5 а), при  $r_2 \approx 33.8$ . Из (24) в этом случае получим:

$$\Delta\Pi = -\frac{6}{\chi_0^3 \sin \alpha} \ln \left| 1 + \frac{2l \sin \alpha}{\chi_0 \cos \alpha + 2\rho_2} \right|. \quad (32)$$

При малых углах  $\alpha$  в первом случае перепад давления больше (рис. 5 б), т.к. в этом случае площадь поперечного сечения канала меньше. С увеличением угла раскрытия площадь поперечного сечения канала в первом случае растёт быстрее, чем во втором, и  $\Delta\Pi$  здесь становится меньше. Во втором случае зависимость  $\Delta\Pi(\alpha)$  немонотонна, так как, начиная с некоторого угла раскрытия, площадь поперечного сечения канала (для соответствующих  $\xi$ ) уменьшается, а значит, увеличивается скорость жидкости и перепад давления.

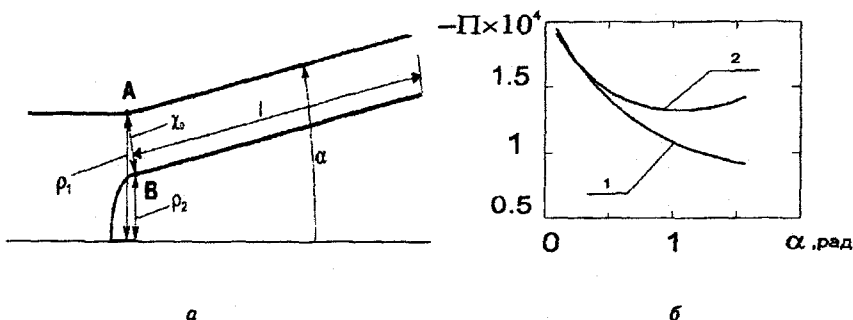


Рис. 5. Распределение давления вдоль распределительного участка экструзионной головки:

а — распределительный участок экструзионной головки; б — зависимость перепада давления от угла раскрытия  $\alpha$ ; 1 — при постоянном радиусе  $\rho_1$ , 2 —  $\rho_2$

Представленные результаты совместно с работами, выполненными автором ранее [4,5,13,14], позволяют выбрать оптимальные технологические и конструктивные параметры экструзионных головок, а также получить их напорно-расходную характеристику, с помощью которой можно определить рабочую точку экструдера.

Обозначения:  $d$  — эквивалентный диаметр, м;  $P, P_0$  — давление текущее и на входе, Па;  $Q$  — объемный расход, м<sup>3</sup>/с;  $R, R_0, R_1$  — координата радиальная, входа в канал и выхода, м;  $r_0$  — параметр обезразмеривания, как правило, радиус фильерного канала, м;  $x', y', z'$  — декартовы координаты, м;  $\alpha$  — половина угла раскрытия конуса, рад;  $\lambda$  — постоянная разделения;  $\mu$  — вязкость, Па·с;  $\theta$  — угловая координата, рад;  $X$  — поперечная биконическая координата, м;

$$Gn = \frac{\mu V^2}{\lambda \Delta T_{\text{теол}}} \text{ — число Нема-Гриффита, } Re = \frac{dV\rho}{\mu} \text{ — число Рейнольдса.}$$

Список литературы: 1. *Тадмор З., Гогос К.* Теоретические основы переработки полимеров. — М.: Химия, 1984. — С. 632. 2. *Торнер Р. В., Акутин М. С.* Оборудование заводов по переработке пластмасс. — М.: Химия, 1986. — С. 400. 3. *Пономаренко В. Г., Потехина Г. Ф., Ульев Л. М. и др.* Определение реологических свойств высоковязких жидкостей с помощью автоматического капиллярного вискозиметра // Инж.- физ. журн. — 1990. — Т. 59, № 1. — С. 158 — 159. 4. *Ульев Л. М.* Течение и теплообмен высоковязкой жидкости в круглом конфузоре // ТОХТ. — 1992. — Т. 26, № 2. — С. 243-253. 5. *Ульев Л. М.* Неизотермическое течение расплавов термопластичных полимеров в коническо-цилиндрических фильерах // ТОХТ. — 1996. — Т. 30, № 6. — С. 583-590. 6. *Слэзкин Н. А.* Движение вязкой жидкости в конусе и между двумя конусами // Матем. сборник. — 1935. — Т. 42, № 1. — С. 43-64. 7. *Халпел Дж. Бренер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М.: Мир, 1976. — С. 632. 8. *Литвинов В. Г., Иванова Н. И.* Задача о движении нелинейно-вязкой среды в осесимметричных каналах // Прикладная механика. — 1994. — Т. 30, № 11. — С. 85-90. 9. *Торнер Р. В.* Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия. 1977. С. 464. 10. *Гольдин А. М., Карамзин В. А.* Гидродинамические основы процессов тонкослойного сепарирования. — М.: Агропромиздат, 1985. — С. 264. 11. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидродинамика. Ч. 2. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 612. 12. *Новиков П. А., Люблин Л. Я., Новикова В. И.* Течения и тепло-массообмен в щелевых системах. — Минск.: Навука і Тэхніка, 1991. — С. 357. 13. *Ульев Л. М.* Неизотермическое течение расплавов термопластичных

полимеров в круглых формирующих каналах // ТОХТ. — 1995. — Т. 29, № 3. — С. 233-241. 14. Ульев Л. М. Напорно-расходная характеристика круглых формирующих каналов при неизотермическом течении расплавов термопластичных полимеров // Инж.- физ. журн. — 1996. — Т. 69, № 4. — С. 606-614.

Поступила в редколлегию 07.05.97

*А. Н. Шуников, Н. В. Сметанкина*

## **ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

Для решения задач статического изгиба однослойных оболочек, рассмотренных в рамках классической теории, в работе [1] был предложен метод контурных рядов. Этот метод является аналогом метода расширения заданной системы. Настоящая работа посвящена применению метода контурных рядов для случая вынужденных колебаний многослойных пластин сложной формы.

Пусть в системе декартовых координат дана многослойная пластина произвольной формы, состоящая  $I$  слоев постоянной толщины, с поперечной нагрузкой  $q$  и заданными граничными условиями. В плоскости  $xOy$  пластина занимает область  $\Omega$ , ограниченную контуром  $L$ , заданным параметрическими уравнениями  $x_L = x(\varphi)$ ,  $y_L = y(\varphi)$ ,  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ . Нагрузка  $q$  распределена по площади  $\Omega_q$  ( $\Omega_q \in \Omega$ ), причем  $q = q(x, y, t)$ ,  $t$  — время. Заданная пластина расширяется до вспомогательной пластины  $\Omega_E$ ,  $\Omega \in \Omega_E$ . Форму контура  $L_E$  пластины  $\Omega_E$  и граничные условия выбираем так, чтобы для нее возможно было получить простое аналитическое решение. В настоящей работе эту роль выполняет прямоугольная шарнирно опертая пластина. Чтобы реализовать действительные граничные условия на контуре заданной пластины, к вспомогательной пластине  $\Omega_E$  по следу  $L$  прилагаются дополнительные распределенные усилия и моменты (компенсирующие нагрузки)  $\bar{P}^c = \{p_j^c\}$ ,  $p_j^c = p_j^c(x_L, y_L, t)$ ,  $j = \overline{1, 2I+3}$ . Таким образом, исходная задача о колебаниях пластины  $\Omega$  с произвольной формой контура под действием динамической нагрузки  $q$  сводится к задаче о колебаниях прямоугольной пластины  $\Omega_E$  под действием внешней нагрузки  $q$  и компенсирующих нагрузок  $\bar{P}^c$ .

Динамическое поведение пластин описывается уточненной теорией, учитывающей деформации поперечного сдвига в каждом из слоев [2,3].

**СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ**

**ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Выпуск 7**

**Часть 2. Механика. Машиностроение**

Редактор *Л. Р. Моисеева*

Технический редактор *Л. Ф. Иванова*

Корректоры *Л. Ф. Иванова, Л. Р. Моисеева*

---

Подписано к печати 14.07.97 г. Формат 60x80/16. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 5.86. Уч.-изд. л. 5.80. Тираж 150. Заказ 54-10.

---

Напечатано на ризографе ХГПУ  
310002, Харьков, ул. Фрунзе, 21