

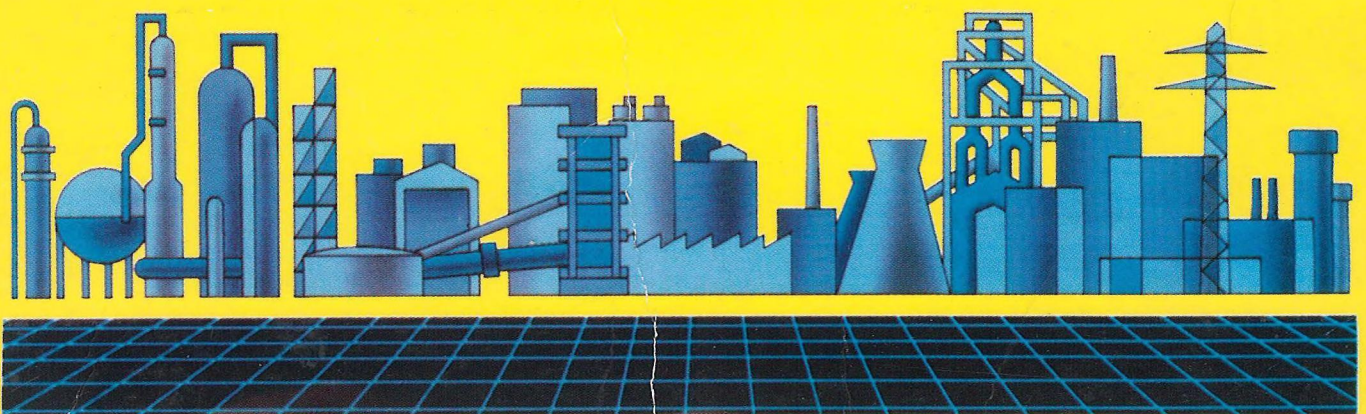
ISBN 5-7763-2106-9
ISBN 5-7763-2107-7

ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ

ЩОКВАРТАЛЬНИЙ НАУКОВО-ПРАКТИЧНИЙ ЖУРНАЛ



3'2001



Ульев Л.М.

**ТЕПЛООБМЕН ПРИ МЕДЛЕННОМ КОНФУЗОРНОМ ТЕЧЕНИИ
В СООСНЫХ КОНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ
ДЛЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПЕРВОГО РОДА И С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ
МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ**

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Изучение и определение характера теплообмена при медленном течении жидкостей в каналах различной формы является одной из фундаментальных задач теории теплопереноса, т.к. на основе такого изучения проводятся исследования ряда других проблем, возникающих при создании промышленного оборудования. Например, при определении оптимальных технологических и конструкционных параметров формирующего оборудования для производства труб, шлангов, пленок, кабелей приходится решать задачу конвективного теплообмена расплавов полимеров в коаксиальных конических конфузорах, которые являются неотъемлемой частью распределительных устройств экструзионных головок [1, 2].

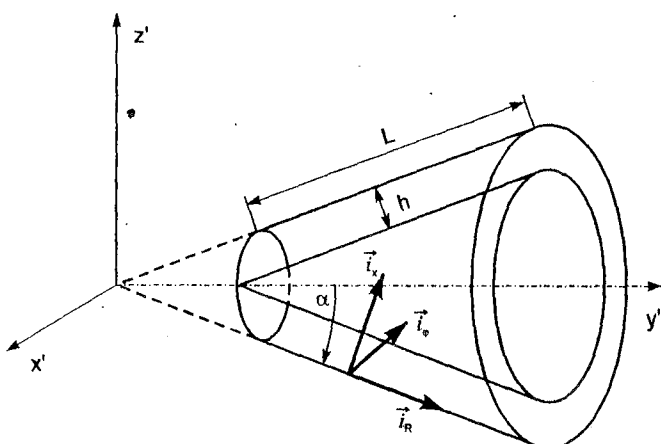


Рис. 1. Геометрия конического зазора постоянной ширины: L – длина конической части канала, м; h – ширина зазора, м; i_R, i_x, i_ϕ – орты в биконической системе координат

Современные технологии позволяют создавать и поддерживать различные режимы теплообмена на границах каналов, но экспериментальный подбор оптимальных характеристик процесса требует значительных средств. Построение численных моделей процессов переработки также не всегда оправдано, т.к. во многих случаях можно получить адекватные соотношения для расчета параметров течения и теплообмена, используя аналитические решения. В дальнейшем полученные решения могут стать основой разработки и тестами для проверки численных, асимптотических и приближенных методов расче-

та более сложных задач.

Автором в работах [3–5] решена задача изотермического течения в коаксиальных конических каналах с различным расположением граничных поверхностей. В [6,7] исследован конвективный теплообмен при медленном диффузорном течении в конических зазорах при граничных условиях третьего рода, а в [8 – 10] при симметричных и антисимметричных граничных условиях первого рода. В [11 – 14] изучался теплообмен при диффузорном течении для различных функциональных распределений температуры на границах канала, а в [15] исследован теплообмен в случае конфузорного течения для граничных условий первого рода. В [6] показано, что для практически интересных расходов жидкости и размеров канала [3,4] числа Рейнольдса $Re \ll 1$, Нема – Гриффита $Gn \ll 1$, Пекле $Pe > 100$. Число Нема – Гриффита при больших значениях динамической

вязкости расплавов полимеров может быть мало как из-за незначительных скоростей течения, так и за счет большой величины интервала температуры, на котором происходит значительное изменение вязкости – ΔT_{rheol} [16]. Откуда понятно, что при малых Gn и больших ΔT_{rheol} число Бринкмана может быть таким, при котором тепловые потоки, вызванные диссипативными эффектами, будут сравнимы с тепловыми потоками на границах канала. Поэтому в данной работе исследуется конвективный теплообмен в соосных конических конфузорах при граничных условиях первого рода с заданным распределением температуры на границах канала и с учетом теплоты диссипации для расплавов полимеров, которые в пределах изменения параметров переработки ведут себя как ньютоновские жидкости [17].

Диссипативная функция определяется выражением $F = \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}$ [18], где $\sigma_{ik} = 2\mu \cdot \varepsilon_{ik}$ – тензор вязких напряжений, ε_{ik} – тензор скоростей деформации, который определяется выражениями: $\varepsilon_{kk} = \sum_{i=1}^3 \frac{V_i}{H_i H_i} \cdot \frac{\partial H_k}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{V_k}{H_k} \right)$, $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left[\frac{H_k}{H_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{V_k}{H_k} \right) + \frac{H_l}{H_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{V_l}{H_l} \right) \right]$ (19), где x_i – ортогональные координаты, H_i – коэффициенты Ламе.

Как и ранее в работах [3 – 15] будем рассматривать течение и теплообмен в биконической системе координат (рис. 1), определяемых преобразованием [20]:

$$z' = R \cos \alpha + X \sin \alpha, \quad (1)$$

$$y' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \sin \varphi = \Omega \sin \varphi, \quad (2)$$

$$x' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \cos \varphi = \Omega \cos \varphi. \quad (3)$$

В [3] определены коэффициенты Ламе для преобразования (1) – (3): $H_X = 1$, $H_R = 1$, $H_\varphi = \Omega$ и соотношение между продольной V_R и поперечной V_X компонентами скорости с учетом того, что для практически важных приложений выполняется условие $R \tan \alpha \gg h$, которое имеет вид $V_X = o(V_R)$.

Теперь, используя определения для компонентов тензоров напряжения и скорости деформации сдвига, получим выражение, определяющее мощность диссипации механической энергии:

$$F(R, X) = 4\mu \left(\frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^2. \quad (4)$$

Приведенные выше оценки позволяют рассматривать течение расплава как ползущее течение [21], а в уравнении теплопереноса пренебречь изменением кондуктивного теплового потока вдоль течения по сравнению с изменением конвективного теплового потока и записать систему уравнений аксиально-симметричного конвективного теплообмена для конфузороного течения в безразмерных переменных $s = \frac{R_1 - R}{h}$, $\chi = \frac{X}{h}$,

$$V_0 = \frac{Q}{\pi h (2R_1 \sin \alpha - h \cos \alpha)}, \quad v = \frac{V}{V_0}, \quad \Pi = \frac{(P - P_0) h}{\mu V_0}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \text{ в виде:}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \chi} \right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (\omega v) = 0; \quad (6)$$

$$Pe_0 v \frac{\partial \Theta}{\partial s} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\omega \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \right) + Br \tilde{F}(s, \chi), \quad (7)$$

где $\omega = \xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha$, $Pe_0 = \frac{V_0}{ha}$, $Br = \frac{\mu V_0^2}{\lambda(T_1 - T_0)}$, $\tilde{F}(s, \chi) = 4 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \chi} \right)^2$.

Будем решать задачу (5) – (7) с наиболее общими условиями первого рода на границах канала [14]. В этом случае условия однозначности запишутся:

$$v = 0, \quad \chi = 0, \quad 0 < s \leq \xi_1 - \xi_0, \quad (8)$$

$$v = 0, \quad \chi = 1, \quad 0 < s \leq \xi_1 - \xi_0, \quad (9)$$

$$\Pi = 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad s = 0, \quad (10)$$

$$\Theta = 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad s = 0, \quad (11)$$

$$\Theta = 1 + f_1(s), \quad \chi = 0, \quad 0 < s \leq \xi_1 - \xi_0, \quad (12)$$

$$\Theta = \Theta_2 + f_2(s), \quad \chi = 1, \quad 0 < s \leq \xi_1 - \xi_0, \quad (13)$$

где $f_i(s)$ – кусочно-дифференцируемые функции ($i = 1, 2$ везде, если специально не оговорено), удовлетворяющие условиям: $f_i(0) = 0$, $\left| \frac{df_i}{ds} \right| < 1$ [14].

Решение гидродинамической задачи (5), (6), (8) – (10) для практически интересных случаев течения, когда выполняется условие $\xi \operatorname{tg} \alpha \gg 1$ получено в [15]:

$$v = \frac{6(2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)}{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha} (\chi^2 - \chi), \quad (14)$$

$$\Pi = -6(\operatorname{ctg} \alpha - 2\xi_1) \ln \frac{\operatorname{ctg} \alpha - 2(\xi_1 - s)}{\operatorname{ctg} \alpha - 2\xi_1}. \quad (15)$$

Для получения решения задачи (7), (11) – (13) представим его в виде суперпозиции двух решений с четными и нечетными граничными условиями [8, 9]:

$$\Theta(s, t) = \Xi_1(s, t) + \Xi_2(s, t), \quad (16)$$

где $t = 2\chi - 1$, а граничные условия имеют вид:

$$\Xi_1 = \frac{1 + \Theta_2 + f_1 + f_2}{2}, \quad \Xi_2 = \frac{1 - \Theta_2 + f_1 - f_2}{2}, \quad t = -1, \quad (17)$$

$$\Xi_1 = \frac{1 + \Theta_2 + f_1 + f_2}{2}, \quad \Xi_2 = \frac{-1 + \Theta_2 - f_1 + f_2}{2}, \quad t = 1, \quad (18)$$

$$\Xi_1 = 0, \quad \Xi_2 = 0, \quad s = 0. \quad (19)$$

С помощью (17) – (19) для функций $\Xi_1(s, t)$ и $\Xi_2(s, t)$ получим выражения:

$$\Xi_1(s, t) = \Phi_1(s, t) + \frac{1 + \Theta_2}{2} + \frac{f_1(s) + f_2(s)}{2}, \quad (20)$$

$$\Xi_2(s, t) = \Phi_1(s, t) + \left[\frac{\Theta_2 - 1}{2} + \frac{f_2(s) - f_1(s)}{2} \right] t, \quad (21)$$

где функции $\Phi_i(s, t)$ удовлетворяют однородным граничным условиям:

$$\Phi_i(s, t) = 0, \quad t = \pm 1, \quad (22)$$

начальным условиям:

$$\Phi_1(0, t) = -\frac{1 + \Theta_2}{2}, \quad (23)$$

$$\Phi_2(0, t) = \frac{1 - \Theta_2}{2} t, \quad (24)$$

и уравнению

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \frac{8}{3} \frac{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha}{\text{Pe}(1 - t^2)} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} + G_i(t) - \frac{8}{3} \text{Br} \frac{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha}{\text{Pe}(1 - t^2)} \tilde{F}_i(s, t) = 0, \quad (25)$$

где $\text{Pe} = \text{Pe}_0 (2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{Q}{\pi a h}$, $G_1(s, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial s} \right)$, $G_2(s, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial s} - \frac{\partial f_1}{\partial s} \right) t$,

диссипативная функция определится выражением:

$$\tilde{F}_1(s, t) = \frac{2(2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)^2}{[2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha]^2} \left\{ \frac{4 \sin^2 \alpha (1 - t^2)^2}{[2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha]^2 + t^2} \right\}, \quad (26)$$

а $\tilde{F}_2(s, t) = 0$ – функция, введенная для удобства записи.

Решать задачу (22) – (25) будем методом разложения по собственным функциям. Для этого рассмотрим однородную часть уравнения (25):

$$\frac{3}{8} \frac{Pe}{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha} (1 - t^2) \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (27)$$

и, представляя решение (27) в виде произведения $\Phi_i(s, t) = Y_i(s) \Psi_i(t)$, приходим к задаче Штурма – Лиувилля, которая определится системой уравнений:

$$\Psi_i'' + \gamma_i^2 (1 - t^2) \Psi_i = 0, \quad (28)$$

$$\Psi_i = 0, \quad t = \pm 1, \quad (29)$$

где $\gamma_i = \beta_i/4$, β_i – постоянная разделения для однородного уравнения (27).

В [6] показано, что уравнение (28) сводится к уравнению Уиттекера и имеет решение:

$$\Psi(t) = C_1 \sqrt{\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\gamma}{4}, \frac{3}{2}; \gamma t^2\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\gamma t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\gamma}{4}, \frac{1}{2}; \gamma t^2\right), \quad (30)$$

где ${}_1F_1(a, b; x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция; C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Подставляя (29) в (28), получим:

$$-C_1 \sqrt{\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\gamma}{4}, \frac{3}{2}; \gamma\right) + C_2 \sqrt{\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\gamma}{4}, \frac{1}{2}; \gamma\right) = 0, \quad (31)$$

$$C_1 \sqrt{\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\gamma}{4}, \frac{3}{2}; \gamma\right) + C_2 \sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\gamma}{4}, \frac{1}{2}; \gamma\right) = 0. \quad (32)$$

Очевидно, что уравнения (30) и (31) совместны только, когда $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$. В первом случае уравнение для определения собственных значений имеет вид:

$${}_1F_1\left(\frac{1-\gamma}{4}, \frac{1}{2}; \gamma\right) = 0, \quad (33)$$

и собственными функциями задачи являются четные функции:

$$\Psi_{1n} = \exp\left(-\frac{\gamma_{1n}t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\gamma_{1n}}{4}, \frac{1}{2}; \gamma_{1n}t^2\right). \quad (34)$$

При $C_2=0$ собственные значения определяются из уравнения:

$${}_1F_1\left(\frac{3-\gamma}{4}, \frac{3}{2}; \gamma\right) = 0, \quad (35)$$

и тогда собственными функциями будут нечетные функции:

$$\Psi_{2n} = \mu_{2n} \exp\left(-\frac{\mu_{2n}t^2}{2}\right) t {}_1F_1\left(\frac{3-\mu_{2n}}{4}, \frac{3}{2}; \mu_{2n}t^2\right). \quad (36)$$

Заметим, что значение γ_n можно с приемлемой для расчетов точностью вычислить, используя соотношение [22] $\gamma_{1n} = 4n+5/3$, и, как показывают расчеты при $n > 4$, выполняется равенство $\gamma_{2n} = \gamma_{1n}+2$.

Используя (28) и (29), легко показать, что системы функций, определяемые равенствами (34) и (36), являются ортогональными с весом $(1-t^2)$ на отрезке $[-1,1]$.

Поэтому неоднородные члены уравнения (25)

$$B_i(s, t) = G_i(s, t) - \frac{8 \text{Br}}{3 \text{Pe}} \frac{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha}{1-t^2} \tilde{F}_i(s, t), \quad (37)$$

мы можем представить в виде разложения по собственным векторам задачи, определенных выражениями (28) и (29):

$$B_i(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{in}(s) \Psi_{in}(t), \quad (38)$$

что позволяет, используя свойство ортогональности собственных функций, определить коэффициенты разложения $B_{in}(s)$:

$$B_{in} = \frac{\int_{-1}^1 (1-t^2) B_i(s, t) \Psi_{in}(t) dt}{\|\Psi_{in}\|^2}, \quad (39)$$

где $\|\Psi_{in}\|^2 = \int_{-1}^1 (1-t^2) \Psi_{in}^2 dt$ - квадрат нормы собственных функций.

Функция $(1-t^2)$ – четная на отрезке $[-1,1]$, а $B_i(s)$ не зависит от t , и тогда, если выбрать в качестве базиса для решения задачи (22), (23), (25) функции, определяемые со-

отношениями (35), (36) нечетные на этом отрезке, мы получим, что все $B_{1n}(s) = 0$. Поэтому, в качестве ортогонального базиса в этом случае необходимо выбрать систему функций, определяемых соотношениями (33) и (34).

Аналогично для решения задачи (22), (24), (25), где функция $B_2(s,t)$ нечетная на отрезке $[-1, 1]$, в качестве базисных функций выберем нечетные функции (31), (32). Следовательно, (39) мы можем переписать в виде:

$$B_{1n} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) M_{1n} + \frac{8 \text{Br}}{3 \text{Pe}} \left[2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha \right]^{-1} \frac{\int_{-1}^1 \tilde{F}_1(s,t) \Psi_{1n}(t) dt}{\|\Psi_{1n}\|^2}, \quad (40)$$

$$B_{2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial s} - \frac{\partial f_1}{\partial s} \right) M_{2n}, \quad (41)$$

$$\text{где } M_{1n} = \frac{\int_{-1}^1 (1-t^2) \Psi_{1n}(t) dt}{\|\Psi_{1n}\|^2}, \quad M_{2n} = \frac{\int_{-1}^1 t(1-t^2) \Psi_{2n}(t) dt}{\|\Psi_{2n}\|^2}.$$

Тем самым мы определили собственные функции поставленных задач. Следовательно, общие решения задач (22), (23), (25) и (22), (24), (25), являющиеся суммой соответствующих частных решений, примут вид:

$$\Phi_i(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{in}(s) \Psi_{in}(t). \quad (42)$$

Далее, подставляя функции Φ_i и разложения (40), (41) в уравнение (25) и начальные условия, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $Y_{in}(s)$:

$$Y'_{in} + \frac{8\gamma_i^2}{3\text{Pe}} \left[2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha \right] Y_{in} + B_{in} = 0, \quad (43)$$

$$Y_{in}(0) = \frac{\int_{-1}^1 \Phi_i(0,t) (1-t^2) \Psi_{in}(t) dt}{\|\Psi_{in}\|^2}. \quad (44)$$

Решения (43), (44) можно получить, используя метод вариации произвольной постоянной, и записать в виде:

$$Y_{1n} = -\frac{1 + \Theta_2}{2} M_{1n} E_{1n} - \frac{1}{2} M_{1n} I_{1n} + K_n J_n, \quad (45)$$

$$Y_{2n} = \frac{1 - \Theta_2}{2} M_{2n} E_{2n} - \frac{1}{2} M_{2n} I_{2n}, \quad (46)$$

где $E_{in} = \exp \left\{ -\frac{8s\gamma_{in}^2 [(2\xi_1 - s)\sin\alpha - \cos\alpha]}{3Pe} \right\}$, $I_{in} = \int_0^s \left(\frac{df_1}{d\tau} + \frac{df_2}{d\tau} \right) T_{in}(\tau) d\tau$,

$$I_{2n} = \int_0^s \left(\frac{df_2}{d\tau} - \frac{df_1}{d\tau} \right) T_{2n}(\tau) d\tau, K_n = \frac{24Br(2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha)^2}{Pe \|\Psi_{in}\|^2},$$

$$T_{in}(\tau) = \exp \left\{ -\frac{8\gamma_{in}^2 (\tau - s) [(2\xi_1 - s - \tau)\sin\alpha - \cos\alpha]}{3Pe} \right\},$$

$$J_n = \int_0^s \frac{D_{in}(\tau) T_{in}(\tau) d\tau}{2(\xi_1 - \tau)\sin\alpha - \cos\alpha}, D_n(\tau) = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{4\sin^2\alpha(1-t^2)^2}{[2(\xi_1 - \tau)\sin\alpha - \cos\alpha]^2} + t^2 \right\} \Psi_{in}(t) dt.$$

Возвращаясь к исходным переменным, запишем решение задачи:

$$\Theta(s, \chi) = 1 + f_1(s) + [\Theta_2 - 1 + f_2(s) - f_1(s)]\chi + \Phi_1(s, \chi) + \Phi_2(s, \chi), \quad (47)$$

с помощью которого вычислим среднемассовую температуру потока:

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} &= \frac{2\pi \int_0^1 v \Theta(\xi, \chi) (\xi \sin\alpha - \chi \cos\alpha) d\chi}{\bar{v} \pi (2\xi \sin\alpha - \cos\alpha)} = \\ &= \frac{12}{\cos\alpha - 2\xi \sin\alpha} \int_0^1 (\chi^2 - \chi) \Theta(\xi \sin\alpha - \chi \cos\alpha) d\chi, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\bar{v} = \frac{2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi \sin\alpha - \cos\alpha} \quad (49)$$

– средняя по поперечному сечению канала безразмерная скорость.

Для анализа теплообмена на границах канала мы будем использовать как числа Нуссельта, определенные традиционным способом, т.е. отношение локальных коэффициентов теплоотдачи к разности между среднемассовой температурой потока и текущей температурой стенок:

$$Nu_i = \frac{\alpha_i h}{\lambda} = (-1)^{i-1} \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=i-1}, \quad (50)$$

так и безразмерный тепловой поток на стенках канала, при определении которого используется температурный масштаб, выбранный для получения безразмерных величин [23]:

$$Nu_i^* = (-1)^i \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=i-1} \quad (51)$$

Определение величин (51) нам необходимо потому, что числа Нуссельта при теплообмене в каналах, поперечное сечение которых представляет **многосвязную** область, могут иметь разрыв [23].

Выполняя дифференцирование в (50) и (51), получим:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=i-1} = \Theta_2 - 1 + f_2(\xi) - f_1(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{1n} \Psi'_{1n} \Big|_{\chi=i-1} - \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n} \Psi'_{2n} \Big|_{\chi=i-1}, \quad (52)$$

где $\Psi'_{1n} \Big|_{\chi=0} = -\Psi'_{1n} \Big|_{\chi=1} = -2\gamma_{1n} (1 - \gamma_{1n}) \exp\left(-\frac{\gamma_{1n}}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{5-\gamma}{4}; \frac{3}{2}; \gamma_{1n}\right)$,

$$\Psi'_{2n} \Big|_{\chi=0} = \Psi'_{2n} \Big|_{\chi=1} = \frac{2\sqrt{\gamma_{2n}} \gamma_{2n} (3 - \gamma_{2n})}{3} \exp\left(-\frac{\gamma_{2n}}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{7-\gamma}{4}; \frac{5}{2}; \gamma_{2n}\right).$$

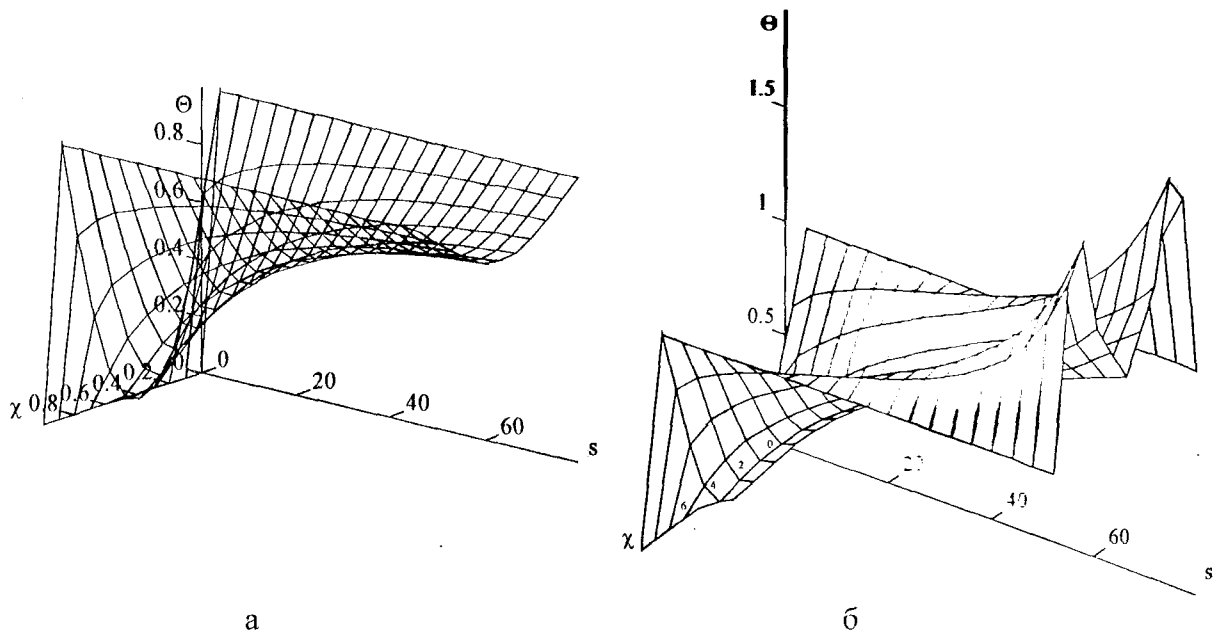


Рис. 2. Распределение безразмерной температуры при конвективном теплообмене в случае конфузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины для параметров: $Re = 10^4$, $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 100$, $\alpha = 15^\circ$, $\Theta_2 = 1$. а – теплообмен при $Br = 0$, б – $Br = 0.2$

Давайте сначала сравним теплообмен при течении в конфузоре с размерами $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 100$, $\alpha = 15^\circ$ без учета диссипативных эффектов, т.е. $Br = 0$ с теплообменом, когда теплота диссипации учитывается. Ранее теплообмен в соосном коническом конфузоре без учета теплоты диссипации и для граничных условий первого рода с постоянными температурами границ автором исследован в работе [15].

Рассмотрим теплообмен при симметричных граничных условиях, т.е. $\Theta_1 = \Theta_2$ для числа Пекле $Pe = 10^4$. Распределение температуры в канале при $Br = 0$ показано на рис. 2а [15]. Тепловой пограничный слой на достаточно коротком расстоянии от входа в канал распространяется на все его поперечное сечение (рис. 2а), и теплообмен в пределах канала стабилизируется, о чем говорит достижение числами Нуссельта (50) их предельных значений $Nu_{i_{\infty}} = 3.77035$ (рис. 3а) [15]. Абсолютная величина безразмерных тепловых потоков Nu_i^* монотонно уменьшается и стремится к 0 вдоль канала (рис. 3а), а безразмерная средняя по поперечному сечению канала температура, монотонно увеличиваясь, стремится к 1 (рис. 4а).

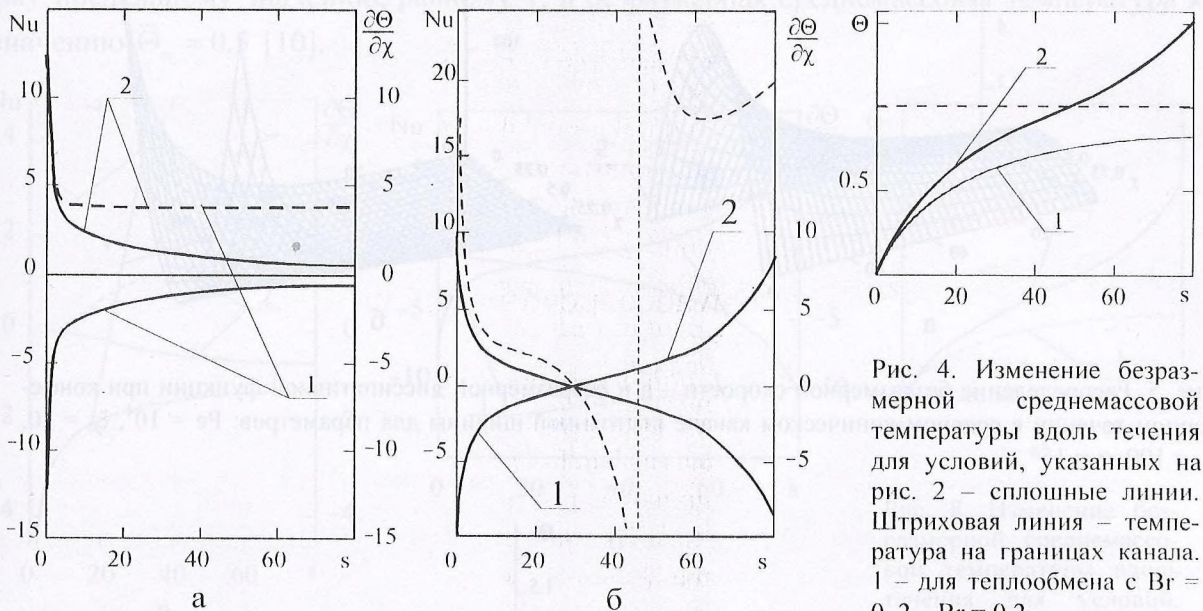


Рис. 4. Изменение безразмерной среднемассовой температуры вдоль течения для условий, указанных на рис. 2 – сплошные линии. Штриховая линия – температура на границах канала. 1 – для теплообмена с $Br = 0$, 2 – $Br = 0.2$

Рис. 3. Распределение нормальных безразмерных градиентов температуры на границах канала для условий, указанных на рис. 2 – сплошные линии, чисел Нуссельта – штриховые: а – теплообмен при $Br = 0$, б – $Br = 0.2$. 1 – на границе $\chi = 0$, 2 – $\chi = 1$

В случае теплообмена, когда теплотой диссипации пренебречь нельзя, например при $Br = 0.2$ и прежних остальных параметрах, мощность диссипации вблизи входа в канал не столь велика, чтобы повлиять на характер теплообмена, поэтому температура жидкости здесь изменяется в основном за счет теплообмена со стенками канала (рис. 2б). При дальнейшем течении скорость жидкости увеличивается вследствие уменьшения поперечного сечения канала (рис. 5а). Увеличивается и скорость деформации сдвига, особенно на периферии течения, что приводит к значительному увеличению мощности диссипации механической энергии (рис. 5б). В результате температура жидкости вблизи границ канала увеличивается значительно сильнее вдоль канала, чем в предыдущем случае, и на некотором расстоянии от входа в канал безразмерная температура периферии

потока превышает безразмерную температуру стенок канала (рис. 2б). На этой длине канала происходит обращение тепловых потоков на границах канала (рис. 3б).

Далее вдоль течения среднemasсовая температура жидкости достигает температуры стенок канала, вследствие этого числа Нуссельта Nu_i , определенные традиционным способом (50), имеют разрывы в этой точке (рис. 3б). Но, если в случае расчета теплообмена при $Br = 0$, числа Nu_i для выбранных параметров стремились к своему предельному значению вниз по течению (рис. 3а), то при учете теплоты диссипации зависимости $Nu_i(s)$ имеют ярко выраженный немонотонный характер (рис. 3б). Далее за разрывом они достигают локального минимума, а затем увеличиваются вследствие увеличения тепловых потоков на границах. Это говорит о том, что теплообмен при данных параметрах течения на всем протяжении канала будет нестабилизированным.

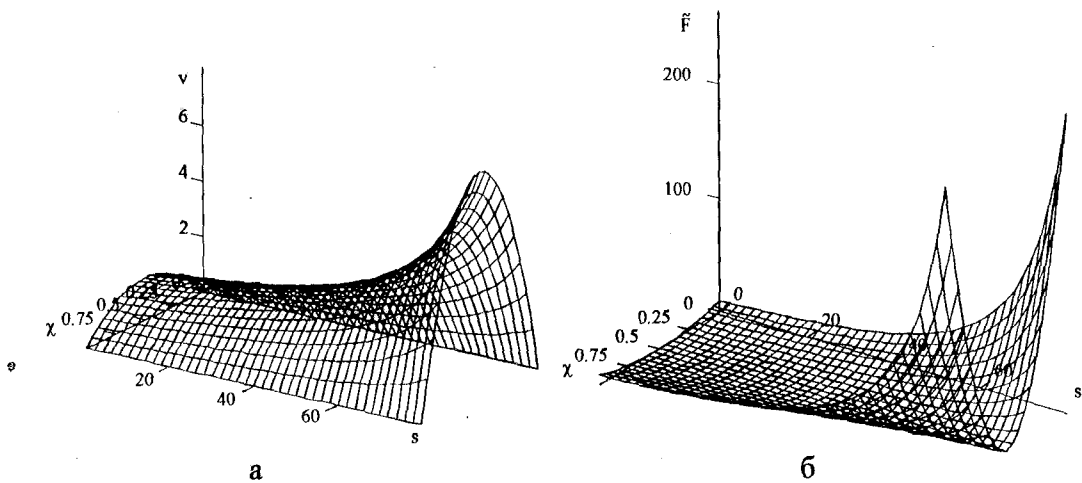


Рис. 5. Распределение безразмерной скорости – а и безразмерной диссипативной функции при конфузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины для параметров: $Pe = 10^4$, $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 100$, $\alpha = 15^\circ$

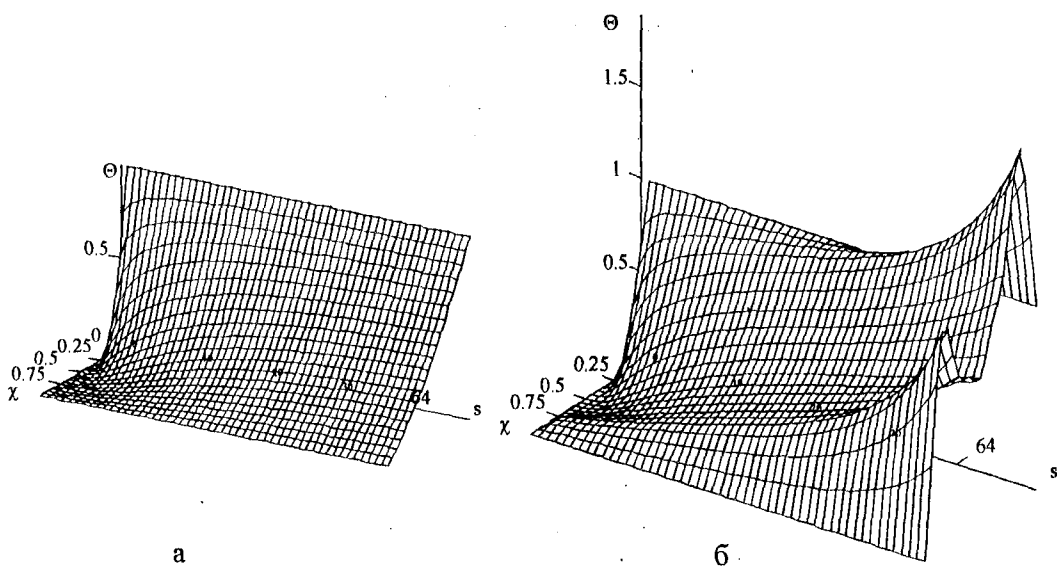


Рис. 6. Распределение безразмерной температуры при конвективном теплообмене в случае конфузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины для параметров: $Pe = 10^4$, $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 100$, $\alpha = 15^\circ$, $\Theta_2 = 0$. а – теплообмен при $Br = 0$, б – $Br = 0.2$

Изменение безразмерной среднемассовой температуры вблизи входа в канал в рассматриваемом случае практически аналогично течению с $Br = 0$ (рис. 4). Затем вдоль течения вследствие увеличения мощности диссипации $\bar{\Theta}$ растет гораздо существеннее, чем в предыдущем случае, несмотря на то, что тепловые потоки направлены в стороны от жидкости (рис. 4).

Рассмотрим случай течения при несимметричных тепловых граничных условиях, а именно: теплообмен с параметрами: $Re = 10^4$, $\Theta_2 = 0$, $\alpha = 15^\circ$, $\xi_1 = 100$.

При $Br = 0$ тепловой пограничный слой распространяется от границы $\chi = 0$ и только приблизительно на $\frac{1}{3}$ канала достигает границы $\chi = 1$ (рис. 6а). Здесь же становится существенным тепловой поток на внутренней ($\chi = 1$) границе канала (рис. 7а). Числа Нуссельта стремятся к своему предельному значению, которое в этом случае равно [10] $Nu_{i\infty} = 2$, но не достигают его, т.е. теплообмен в пределах канала не стабилизируется. Абсолютная величина тепловых потоков (48) $|Nu_i^*|$ также стремится к своему предельному значению, равному 1, а безразмерная среднемассовая температура к значению $\bar{\Theta}_\infty = 0.5$ [10].

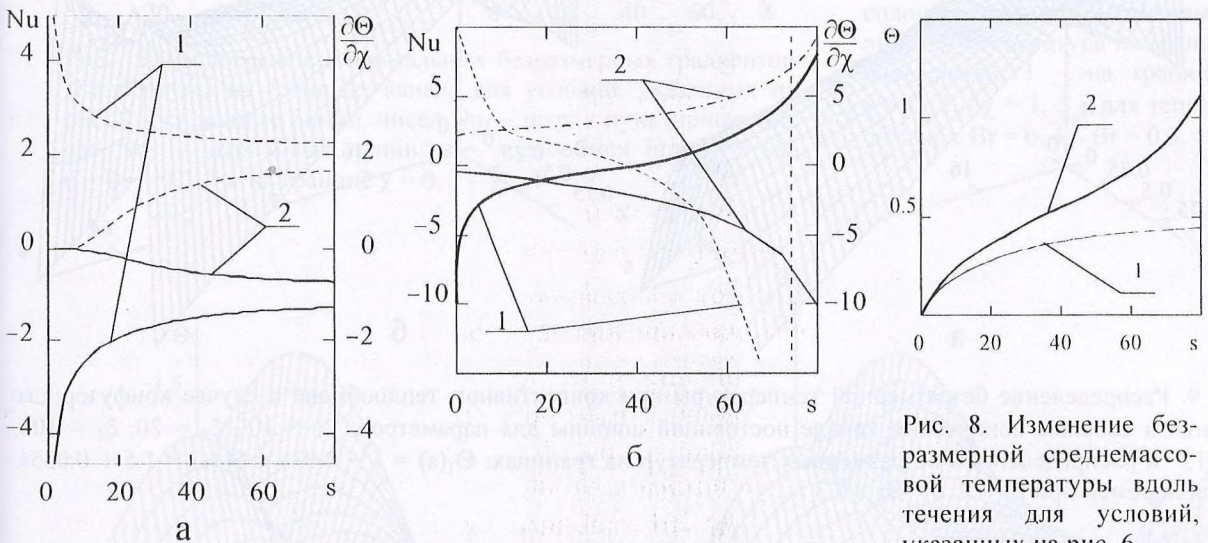


Рис. 7. Распределение нормальных безразмерных градиентов температуры на границах канала для условий, указанных на рис. 6 – сплошные линии, чисел Нуссельта – штриховые: а – теплообмен при $Br = 0$, б – $Br = 0.2$. 1 – на границе $\chi = 0$, 2 – $\chi = 1$

Если же параметры жидкости таковы, что необходимо учитывать теплоту диссипации, например $Br = 0.2$, то это оказывает существенное влияние на развитие температурного поля с самого начала течения (рис. 6б). В этом случае тепловой поток на границе $\chi = 1$ отличен от 0 на всем протяжении канала (рис. 6б), и значения $|Nu_i^*|$ увеличиваются за пределами участка формирования теплового пограничного слоя на обеих границах вследствие повышения температуры потока на периферии канала. Значение числа Nu_1 в пределах участка формирования теплового пограничного слоя уменьшается, но когда тепловой поток на границе $\chi = 0$ меняет направление, число Nu_1 меняет знак, и по мере приближения $\bar{\Theta}$ к 1 (рис. 8) $|Nu_1|$ неограниченно возрастает. Число

Рис. 8. Изменение безразмерной среднемассовой температуры вдоль течения для условий, указанных на рис. 6. 1 – для теплообмена с $Br = 0$; 2 – $Br = 0.2$

Nu_2 непрерывно растет вдоль течения вследствие увеличения нормального градиента температуры на границе $\chi = 1$, т.е. безразмерного теплового потока (рис. 7б). Все это говорит о том, что участки течения со стабилизированным теплообменом в данном случае отсутствуют. Среднемассовая температура жидкости в канале повышается на более значительную величину, чем прежде (рис. 8).

В работах [12, 13] автором рассмотрен теплообмен при диффузном течении в соосных конических каналах для практически важных случаев, когда существует явное изменение температуры границ вдоль течения. Поэтому сейчас мы также рассмотрим теплообмен в конфузоре при линейном изменении температуры его границ вдоль течения. Определяющие параметры остаются прежними за исключением того, что изменение температур на границах канала будут задаваться функциями: $f_1(s) = b_1s$, $f_2(s) = b_2s$, где $b_1 = -0.03$, $b_2 = -0.035$.

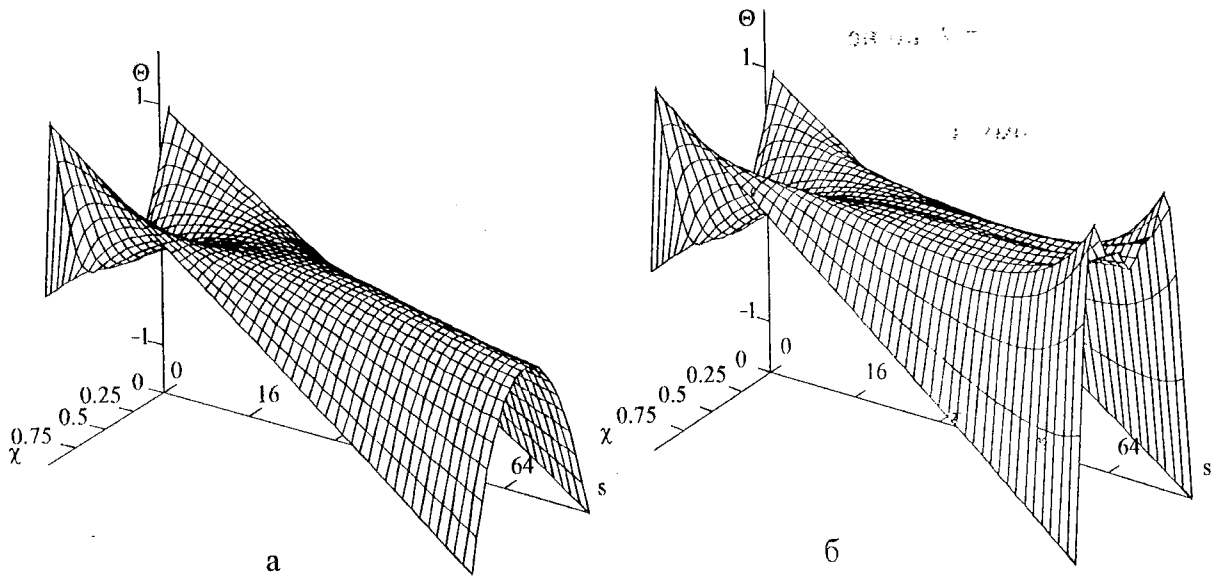


Рис. 9. Распределение безразмерной температуры при конвективном теплообмене в случае конфузороного течения в соосном коническом канале постоянной ширины для параметров: $Pe = 10^4$, $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 100$, $\alpha = 15^\circ$ и распределением безразмерных температур на границах: $\Theta_1(s) = 1 - 0.03s$ и $\Theta_2(s) = 1.5 + 0.035s$. а – теплообмен при $Br = 0$, б – $Br = 0.3$

В случае расчета без учета теплоты диссипации распределение температуры (рис. 9а) во многом аналогично распределению при диффузном течении (рис. 5 в работе [12]), но имеются и свои особенности. При диффузном течении нормальные температурные градиенты на границах и числа Нуссельта стремятся к своим предельным зависимостям и значениям $Nu_{in}^* = (-1)^i [\Theta_2 - 1 - (b_1 - b_2)(\xi - \xi_0)]$ и $Nu_{in} = 2$ соответственно [12].

При конфузороном течении скорость жидкости вдоль канала увеличивается, а площадь поверхности теплообмена уменьшается. Это приводит к тому, что температура центральной области потока изменяется вдоль потока меньше, чем температура жидкости на периферии, и поэтому модули градиентов температуры на границах канала растут вдоль течения за пределами развития тепловых пограничных слоев (рис. 10а), где при диффузном течении они уменьшались. Числа Нуссельта Nu_i в начале течения при формировании тепловых пограничных слоев уменьшаются, затем имеют область разрывов, где среднемассовая температура сравнивается с температурами стенок канала и за этой областью, увеличиваются вдоль течения (рис. 10а), т.е. стабилизация

теплообмена при конфузормом течении в канале с переменными температурами границ не наступает.

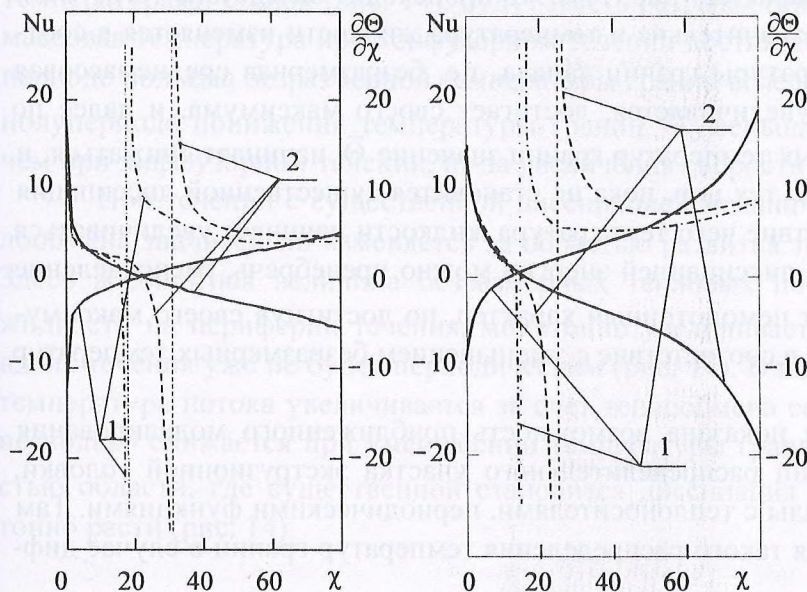


Рис. 10. Распределение нормальных безразмерных градиентов температуры на границах канала для условий, указанных на рис. 9 – сплошные линии, чисел Nu_1 – штрих пунктирные, чисел Nu_2 – штриховые линии: а – теплообмен при $Br = 0$, б – $Br = 0.3$. 1 – на границе $\chi = 0$, 2 – $\chi = 1$

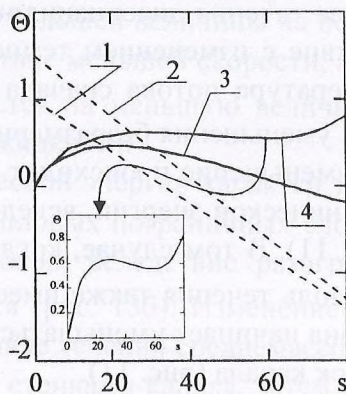


Рис. 11. Изменение безразмерной среднемассовой температуры вдоль течения для условий, указанных на рис. 9 – сплошные линии. Штриховые линии – температура на границах канала. 1 – на границе $\chi = 0$, 2 – $\chi = 1$, 3 – для теплообмена с $Br = 0$, 4 – $Br = 0.3$

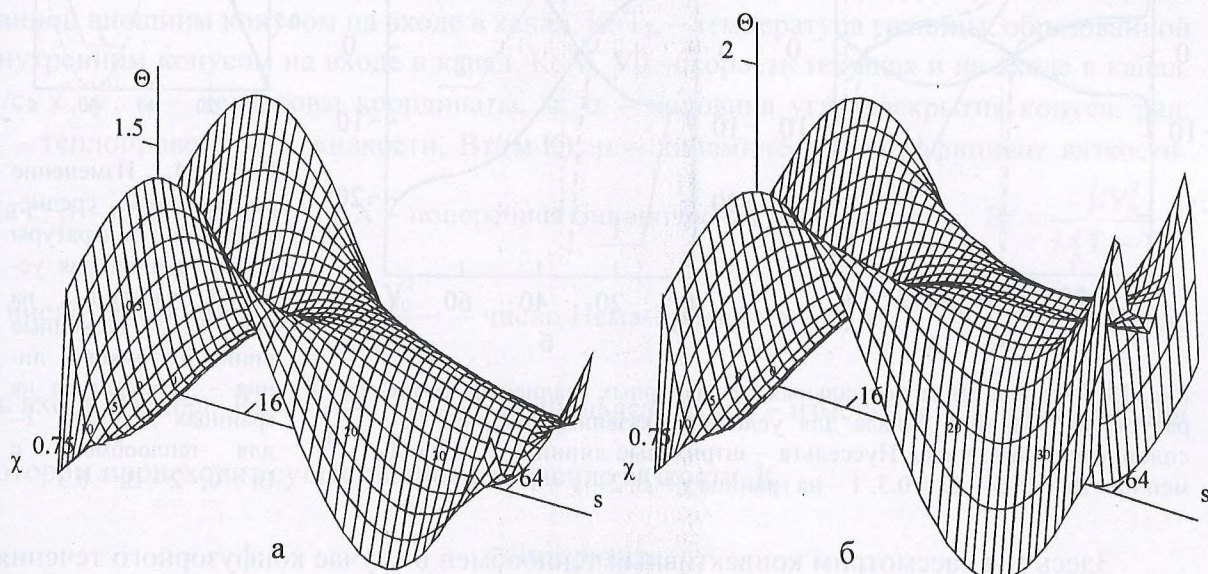


Рис. 12. Распределение безразмерной температуры при конвективном теплообмене в случае конфузормого течения в соосном коническом канале постоянной ширины для параметров: $Pe = 10^4$, $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 100$, $\alpha = 15^\circ$, и распределением безразмерных температур на границах: $\Theta_1(s) = 1 + \sin\left(\frac{\pi s}{40}\right)$ и $\Theta_2(s) = 1 + \sin\left(\frac{\pi s}{40}\right)$. а – теплообмен при $Br = 0$, б – $Br = 0.3$

Учет теплоты диссипации только увеличивает описанные эффекты (рис. 9б, 10б). Зависимость среднемассовой температуры от продольной координаты в данном случае имеет немонотонный характер (рис. 11). Это происходит вследствие того, что в начале течения диссипация незначительна и температура жидкости изменяется в соответствии с изменением температуры границ канала, т.е. безразмерная среднемассовая температура потока сначала увеличивается, достигает своего максимума, и далее по мере уменьшения безразмерных температур границ значение $\bar{\Theta}$ начинает снижаться, и это уменьшение происходит до тех пор, пока не становится существенной диссипация механической энергии, вследствие чего температура жидкости начинает увеличиваться (рис. 11). В том случае, когда диссипацией энергии можно пренебречь, распределение $\bar{\Theta}$ вдоль течения также имеет немонотонный характер, но достигнув своего максимума, она начинает уменьшаться в соответствии с уменьшением безразмерных температур стенок канала (рис. 11).

В работе [14] автором показана возможность приближенного моделирования изменения температуры границ распределительного участка экструзионной головки, стенки которой содержат каналы с теплоносителями, периодическими функциями. Там же рассмотрен теплообмен для такого распределения температур границ в случае диффузорного течения.

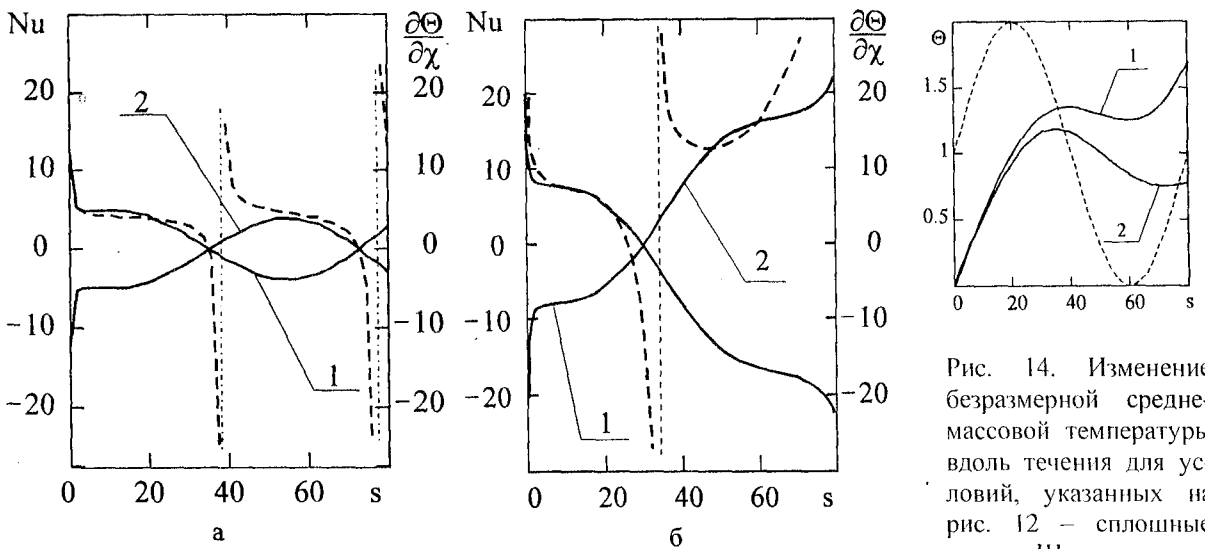


Рис. 13. Распределение нормальных безразмерных градиентов температуры на границах канала для условий, указанных на рис. 12 – сплошные линии, чисел Нуссельта – штриховые линии: а – теплообмен при $Br = 0$, б – $Br = 0.3$. 1 – на границе $\chi = 0$, 2 – $\chi = 1$

Рис. 14. Изменение безразмерной среднемассовой температуры вдоль течения для условий, указанных на рис. 12 – сплошные линии. Штриховая линия – температура на границах канала. 1 – для теплообмена с $Br = 0$, 2 – $Br = 0.3$

Здесь мы рассмотрим конвективный теплообмен в случае конфузурного течения и с распределением безразмерной температуры границ канала вдоль течения, зададимся функцией: $f_1(s) = f_2(s) = \sin\left(\frac{\pi s}{40}\right)$ и $\Theta_2 = 1$. Остальные параметры такие же, как и в предыдущем случае, т.е. $Pe = 10^4$, $Br = 0.3$.

Вследствие того, что средняя скорость в начале конфузурного течения меньше, чем при диффузорном течении, тепловые пограничные слои развиваются здесь на более коротком расстоянии от входа в канал (рис. 12а и рис. 10а в работе [14]). Так же,

как и при диффузорном течении, числа Nu_i будут периодически изменяться вдоль течения с некоторым опережением по фазе изменения $f_i(s)$, а в точках, где $\bar{\Theta}$ сравнивается с температурами стенок (рис. 14), будут иметь разрывы (рис. 13а). Безразмерная средне-массовая температура при конфузорном течении достигает большей величины на полупериоде подъема безразмерной температуры границ вследствие меньшей скорости, а на полупериоде понижения температуры границ $\bar{\Theta}$ уменьшается на меньшую величину, чем при диффузорном течении, из-за увеличения скорости жидкости.

При течении с существенной диссипацией механической энергии характер теплообмена значительно изменяется за областью развития тепловых пограничных слоев. Здесь абсолютная величина безразмерных тепловых потоков, вследствие разогрева жидкости на периферии течения, монотонно увеличивается (рис. 13б). Изменение $\bar{\Theta}$ вдоль течения уже не будет периодическим (рис. 14). В начале течения средне-массовая температура потока увеличивается за счет теплообмена со стенками канала, затем она несколько снижается при уменьшении температуры границ и при достижении жидкостью области, где существенной становится диссипация энергии, $\bar{\Theta}$ начинает монотонно расти (рис. 14).

Обозначения

a – коэффициент температуропроводности, m^2/c ; c – удельная теплоёмкость, Дж/кг К; $F(R, X)$ диссипативная функция, Дж/м³с; h – ширина канала, м; P, P_0 – давление текущее и на входе, Па; Q – объёмный расход, м³/с; R – координата радиальная, м; T, T_0 – температура текущая и на входе в канал, К; T_1 – температура границы, образованной внешним конусом на входе в канал, К; T_2 – температура границы, образованной внутренним конусом на входе в канал, К; V, V_0 – скорость текущая и на входе в канал, м/с; x', y', z' – декартовы координаты, м; α – половина угла раскрытия конуса, рад; λ – теплопроводность жидкости, Вт/(м·К); μ – динамический коэффициент вязкости, Па·с; ρ – плотность, кг/м³; X – поперечная биконическая координата, м; $Br = \frac{\mu V_0^2}{\lambda(T_1 - T_0)}$

– число Бринкмана, $Gn = \frac{\mu V_0^2}{\lambda \Delta T_{\text{theol}}}$ – число Нема-Гриффита, $Pe_0 = \frac{V_0 h c_p}{\lambda}$ – число Пекле

на входе в канал, $Re = \frac{h V_0 \rho}{\mu}$ – число Рейнольдса, ΔT_{theol} – изменение температуры, при

котором происходит существенное изменение вязкости, К.

Литература

1. Joshi M. V. Dies for plastics extrusion. Delhi: Macmillan. India Limited, 1984. 176 p.
2. Sors L., Bardocz L., Radnoti I. Plastic molds and dies. Budapest: Akademiai Kiado, 1980. 495 p.
3. Ульев Л.М. Медленные течения между соосными коническими поверхностями // ИФЖ. 1998. Т. 71, №. 6. С. 1092- 1098.

4. Ульев Л.М. Медленные течения в коаксиальных конических каналах // Вестник ХГПУ. Механика. Машиностроение. Харьков, ХГПУ. 1997. Вып. 7. Ч. 2. С. 22-31.
5. Ульев Л.М. Медленные течения в коаксиальных конических щелях переменной ширины // Вестник ХГПУ. 1999. Вып. 34. С. 3-8.
6. Ульев Л.М. Теплообмен при медленном диффузорном течении жидкости в коаксиальных конических каналах // ТОХТ. 2000. Т. 34. № 1. С. 16 –24.
7. Ульев Л.М. Теплообмен при медленном диффузорном течении в кольцевых конических каналах переменной ширины // Информационные технологии: Наука, техника, технология, образование, здоровье. Сборник научных трудов ХГПУ. Выпуск 6. Ч. 3. Харьков. 1998. – С. 509-513.
8. Ульев Л.М. Ламинарный теплообмен для четных граничных условий первого рода при диффузорном течении в коническом зазоре // Вестник ХГПУ. 1999. Вып. 47. С. 7-15.
9. Ульев Л.М. Ламинарный теплообмен для нечетных граничных условий первого рода при диффузорном течении в коническом зазоре // Информационные технологии: наука, техника, технология, здоровье. Сб. научн. трудов. ХГПУ. Выпуск 7. Часть 4. Харьков. ХГПУ. 1999. С. 110 – 118.
10. Ульев Л.М. Теплообмен при медленном диффузорном течении в коническом зазоре с граничными условиями первого рода // Вестник ХГПУ. 1999. Вып. 56. С. 37-52.
11. Ульев Л.М. Решение задачи ламинарного теплообмена для диффузорного течения в соосных конических каналах при произвольном непрерывном изменении температуры стенок вдоль течения // Вестник ХГПУ. 2000. Вып. 89. С. 81-88.
12. Ульев Л.М. Ламинарный теплообмен при диффузорном течении в соосных конических зазорах для граничных условий первого рода с линейным изменением температуры стенок вдоль течения // Интегровані технології та енергосбереження. – 1999. № 4. С. 45 - 59 .
13. Ульев Л.М. Ламинарный теплообмен при диффузорном течении в коаксиальном коническом канале с переменной температурой внутренней стенки // ТОХТ. 2001. Т. 35, № 1. С. 31 – 41.
14. Ульев Л.М. Ламинарный теплообмен при расходящемся течении в коническом зазоре с кусочно – дифференцируемом распределением температуры на границах // ІТЕ. 2000, № 3. С. 20 – 36.
15. Ульев Л.М. Теплообмен при медленном течении в коаксиальных конических конфузорах для граничных условий первого рода // ІТЕ. 1999. № 2. С. 40 – 52.
16. Ульев Л.М. Течение и теплообмен высоковязкой жидкости в круглом конфузоре // ТОХТ, 1992, № 2. С. 243 – 253.
17. Пономаренко В.Г., Потебня Г.Ф., Ульев Л.М. и др. // Определение реологических свойств высоковязких жидкостей с помощью автоматического капиллярного вискозиметра. // ИФЖ. 1990. Т. 59, №. 1. С. 158- 159.
18. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир. 1973. С. 760.
19. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Госиздат. тех.-теор.лит. 1955. С. 520.

20. Гольдин А.М., Карамзин В.А. Гидродинамические основы процессов тонкослойного сепарирования. М.: Агропромиздат, 1985. С. 264.
21. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия, 1984. С. 632.
22. Лыков А.В. Теплообмен. М.: Энергия, 1972. С. 560.
23. Ульев Л.М. Ламинарный теплообмен в соосном коническом канале в случае граничных условий первого рода // ИФЖ. 2001. Т. 74, № 1. С. 21 – 26.

УДК 536.24: 532.135

Ульев Л.М.

**ТЕПЛОБМІТ ПРИ ПОВІЛЬНОЇ КОНФУЗОРНОЇ ТЕЧІЇ
У АКсіАЛЬНИХ КОНіЧНИХ КАНАЛАХ ПОСТІЙНОЇ ШИРИНИ
ДЛЯ МЕЖОВИХ УМОВ ПЕРШОГО РОДУ ТА З УРАХУВАННЯМ ДИСИПАЦІЇ
МЕХАНіЧНОЇ УНЕРГІЇ**

У роботі одержано аналітичне рішення задачі ламінарного конвективного теплообміну для конфузornoї течії у аксіальних конічних каналах постійної ширини при функціональній зміні температур меж каналу удовж течії та з урахуванням теплоти дисипації. Рішення цікаве тим, що є суперпозицією двох рішень, кожне з яких має свої власні функції та власні значення. У наслідок рішення знайдені розподілення температури рідини у каналі та теплових течій на його межах у залежності від параметрів, які обумовлюють задачу.

