

МЕХАНІКА ТА МАШИНОБУДУВАННЯ

науково-технічний журнал

1,2'2001

ХАРКІВ

в термодинамику. Статистическая физика. –М.: Наука, 1983, -416с. 4. Анипко О.Б. Рациональные теплообменные поверхности / Х.: ХВУ. -1998. -187с. 5. Кирилин В.А., Сычев В.В., Шейдлин А.Г. Техническая термодинамика. -М. Энергоатомиздат, 1983. 6. Двигатели внутреннего сгорания: теория поршневых и комбинированных двигателей / под ред. Орлина А.С. –М.: Машиностроение, 1983. –372с.

О.Б.Аніпко

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО АНАЛІЗУ ТЕРМОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З
УРАХУВАННЯМ ІНТЕНСИВНОСТІ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ

О.В.Anipko

ABOUT ONE APPROACH TO THE ANALYSIS OF THERMODYNAMIC SYSTEMS IN
VIEW OF INTENSITY OF ENERGY TRANSFORMATION PROCESSES

УДК 532.135

Л.М. Ульев

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ
АНОМАЛЬНО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ КОНИЧЕСКОМ
КОНФУЗОРЕ

В последнее время в связи с необходимостью создания высокоэффективного синтезирующего и перерабатывающего оборудования в химической, нефтехимической, пищевой и других отраслях промышленности значительно повысился интерес к изучению течения высоковязких жидкостей и разработке научно обоснованных методов расчета таких течений в проточных деталях аппаратов. Немалую роль при этом играет тот факт, что в связи с ростом цен на материалы и энергоносители экспериментальный подбор оптимальных конструкционных и технологических параметров в настоящее время дорог. Разработка численных методов расчета также не всегда оправдана, т. к. в некоторых случаях можно получить адекватные аналитические выражения для расчета течения высоковязких жидкостей. Но существующие в настоящее время аналитические методы расчета не в полной мере удовлетворяют современным техническим возможностям проектирования и создания промышленных аппаратов, например, для расчета перепада давления в кольцевых конических каналах сейчас используется их ступенчатая аппроксимация цилиндрическими соосными каналами [1, 2], которая дает удовлетворительные результаты только в ограниченном диапазоне углов раскрытия конических поверхностей [3].

Течения в соосных конических каналах встречаются в большинстве экструзионных аппаратов для синтеза и переработки полимеров [4], в экструзионных процессах пищевой и фармацевтической промышленности. Медленные течения высоковязких ньютоновских жидкостей в таких каналах рассмотрены в работах [3, 5, 6], но многие расплавы полимеров в практически интересном интервале скоростей сдвига ведут себя как жидкость Оствальда – де Виля, например, расплав полиэтилена высокой плотности [4]. Даже те расплавы полимеров, которые при больших скоростях сдвига подчиняются линейному реологическому закону, при малых и умеренных скоростях сдвига, характерных для течения в коаксиальных конических каналах распределительного участка экструзионных головок, имеют нелинейную кривую течения, которая хорошо описывается степенным законом [7, 8]. К степенным жидкостям относятся и некоторые пищевые продукты, например, расплавы карамельных масс [9].

Поэтому данная работа будет посвящена получению аналитических выражений для расчета аксиально-симметричного конфузорного течения аномально вязкой жидкости в соосных конических каналах (рис. 1а).

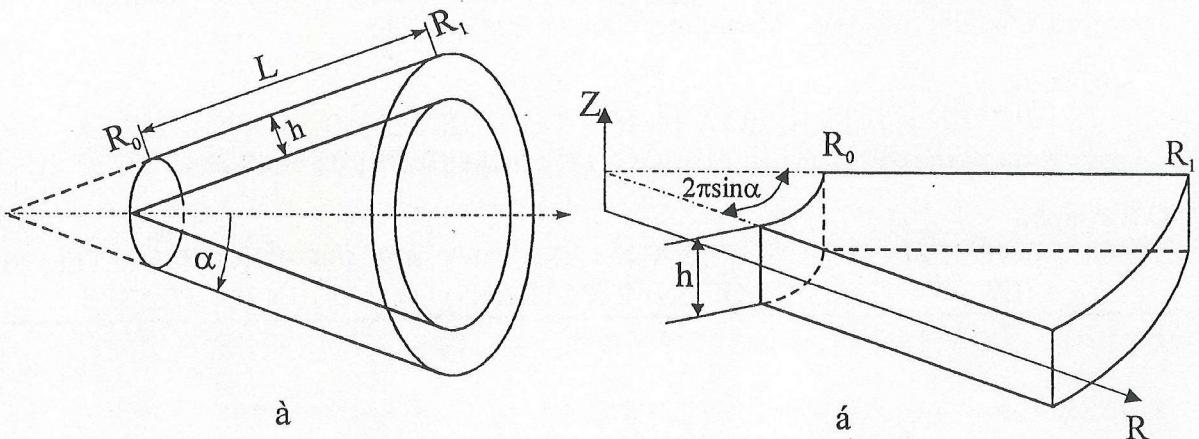


Рис. 1. Геометрия соосного конического канала:

а – соосный конический канал; б – разворот соосного конического канала на плоскость

В промышленных приложениях ширина канала h , как правило, значительно меньше длины образующей канала и расстояния до вершины конической поверхности от рассматриваемой точки, например, в трубных или кабельных головках, т.е. $h/R \ll 1$ и $h/L \ll 1$. Для таких условий можно пренебречь разницей в кривизне границ канала и развернуть коаксиальный конический канал на плоскость (рис. 1б). В [10] автором показано, что аппроксимация для ньютоновских жидкостей позволяет получить хорошие результаты для полууглов раскрытия канала $\alpha \geq 15^\circ$ и практически для любых разумных значений отношения R_0/h , а при $R_0/h \geq 20$, и для значительно меньших углов α .

Аксиально-симметричное конфузорное течение в колышевом коническом канале будет представляться в плоском канале (рис. 1б) как радиальное сходящееся течение, и рассматривать такое течение удобно в цилиндрических координатах.

С помощью уравнения неразрывности

$$\frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_R}{R} + \frac{\partial V_Z}{\partial Z} = 0 \quad (1)$$

оценим соотношения между радиальной составляющей скорости и составляющей, направленной вдоль оси z : $V_Z \approx \frac{h}{L} V_R$, и поскольку $\frac{h}{L} \ll 1$, попечной составляющей скорости в уравнениях, описывающих течение жидкости в выбранном канале, можно пренебречь.

Числа Рейнольдса и Нема – Гриффита при течении в соосных конических каналах экструзионных головок малы $Re \ll 1, Gm \ll 1$ [4], и поэтому в случаях хорошего термостатирования головок или при адиабатическом режиме течения мы можем рассматривать течение как изотермическое, а в уравнении движения пренебречь инерционным членом. Тогда уравнение движения Оствальда – де Виля [8, 11] записывается в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\partial \tau_{RR}}{\partial R} + \frac{\partial \tau_{RZ}}{\partial Z} + \frac{\tau_{RR} - \tau_{\phi\phi}}{R}, \quad (2)$$

где компоненты девиатора тензора напряжений определяются по формулам:

$$\tau_{RR} = 2\mu \frac{\partial V_R}{\partial R}, \tau_{RZ} = \mu \left(\frac{\partial V_R}{\partial Z} \right), \tau_{\phi\phi} = 2\mu \frac{V_R}{R}, \mu = k \left(\sqrt{\frac{1}{2} I_2} \right)^{n-1}, k - \text{коэффициент консистенции}, n - \text{индекс течения (показатель нелинейности кривой течения)}, I_2 - \text{второй инвариант тензора скоростей деформации [8].}$$

В нашем случае I_2 , с учетом сделанных предположений, имеет вид:

$$I_2 = 8 \frac{V_R^2}{R^2} + 2 \left(\frac{\partial V_R}{\partial Z} \right)^2 \quad (3)$$

и поскольку $\frac{Z}{R} \ll 1$, то первым членом в (3) можно пренебречь и положить

$$I_2 = 2 \left(\frac{\partial V_R}{\partial Z} \right)^2.$$

Подставляя I_2 в (2) с учетом знака скорости, получим

$$-\frac{\partial P}{\partial R} = 2k(n-1) \frac{V_R}{R^2} \left| \frac{\partial V_R}{\partial Z} \right|^{n-1} + k \frac{\partial}{\partial Z} \left(\left| \frac{\partial V_R}{\partial Z} \right|^{n-1} \frac{\partial V_R}{\partial Z} \right). \quad (4)$$

Вследствие неравенства $h/L \ll 1$ пренебрегаем в правой части (4) первым членом по сравнению со вторым и записываем уравнение движения в безразмерных переменных

$$\Pi = \frac{(P - P_0) h^n}{k V_0^n}, \xi = \frac{R}{h}, \chi = \frac{Z}{h}, v = \frac{V_R}{V_0}, l = \xi_1 - \xi \text{ в виде:}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial \chi} \right|^{n-1} \frac{\partial v}{\partial \chi} \right), \quad (5)$$

$$\text{где } V_0 = \frac{Q}{2\pi R_1 h \sin \alpha}.$$

Начальными и граничными условиями для уравнения (5) являются условия прилипания на стенках канала, заданное давление на входе и симметричный профиль скорости:

$$v = 0, \chi = \frac{1}{2}, \quad . \quad (6)$$

$$\frac{dv}{d\chi} = 0, \chi = 0, \quad (7)$$

$$\Pi = 0, l = 0. \quad (8)$$

Уравнения (5) – (8) записаны в цилиндрической системе координат, в которой начало оси χ находится на середине ширины канала.

Интегрируя (5) по χ с учетом (7), получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial l} \chi = \left| \frac{\partial v}{\partial \chi} \right|^{n-1} \frac{\partial v}{\partial \chi}. \quad (9)$$

Поскольку $\frac{\partial v}{\partial \chi} < 0$ при $\chi > 0$ и $\frac{\partial \Pi}{\partial l} < 0$ в пределах канала, перепишем (9) как:

$$\frac{\partial v}{\partial \chi} = - \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial l} \right)^{\frac{1}{n}} \chi^{\frac{1}{n}}. \quad (10)$$

Далее интегрируя (10) с учетом (6), получаем:

$$v = \frac{n}{n+1} \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial l} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2 \frac{n+1}{n}} \left[1 - (2\chi)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (11)$$

Для определения градиента давления воспользуемся уравнением неразрывности, записанным в виде условия постоянства расхода в любом поперечном сечении канала:

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} V 2\pi (R_1 - R) \sin \alpha dh = Q, \quad (12)$$

или в безразмерном виде:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} v d\chi = \frac{\xi_1}{2(\xi_1 - 1)}, \quad (13)$$

откуда и получим выражение для определения градиента давления:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial l} = -2^{n+1} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - 1} \right)^n. \quad (14)$$

С помощью (14) находим распределение безразмерной скорости и безразмерного давления в канале:

$$v = \frac{2n+1}{n+1} \frac{\xi_1}{\xi_1 - 1} \left[1 - (2\chi)^{\frac{n+1}{n}} \right], \quad (15)$$

$$\Pi = \frac{2^{n+1}}{1-n} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \xi_1 \left[\left(\frac{\xi_1 - 1}{\xi_1} \right)^{1-n} - 1 \right]. \quad (16)$$

Заметим, что если в (14) и (15) положить $n = 1$, мы получим выражения, определяющие градиент давления и распределение скорости в случае течения ньютоновской жидкости [10]:

$$\frac{\partial \Pi_N}{\partial \xi} = -12 \frac{\xi_1}{\xi_1 - 1}, \quad (17)$$

$$v = \frac{3}{2} \frac{\xi_1}{\xi_1 - 1} \left[1 - 4\chi^2 \right]. \quad (18)$$

Аналогично, если в (16) перейти к пределу $n \rightarrow 1$, получим выражение для перехода безразмерного давления в канале при конфузорном течении ньютоновской жидкости:

$$\Pi_N = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{2^{n+1}}{1-n} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \xi_1 \left[\left(\frac{\xi_1 - 1}{\xi_1} \right)^{1-n} \right] = 12 \xi_1 \ln \frac{\xi_1}{\xi_1 - 1}. \quad (19)$$

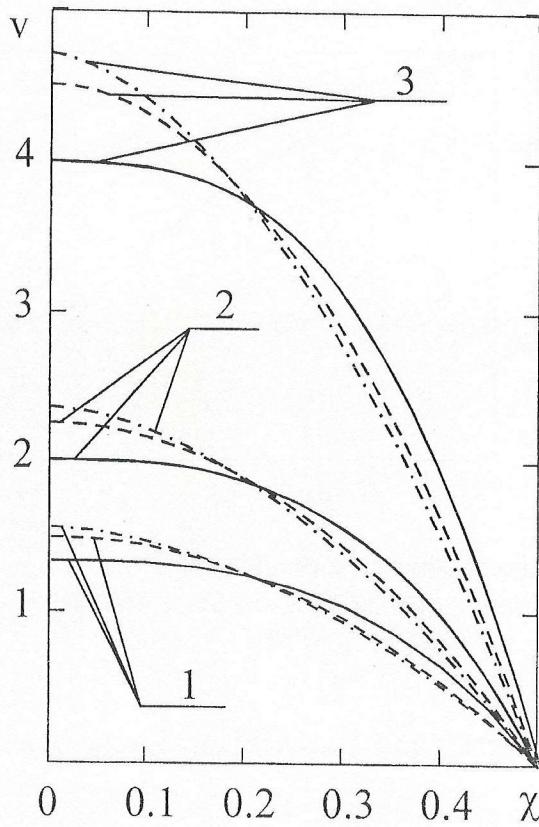


Рис. 2. Распределение безразмерной скорости поперек канала: 1 – на входе в канал, $\chi = 0$; 2 – для $n = 1$; 3 – на выходе из канала, $\chi = 0.4$.

Сплошные линии для жидкости с $n = 0.5$, штриховые для $n = 1$, штрих-пунктирные для $n = 1.3$

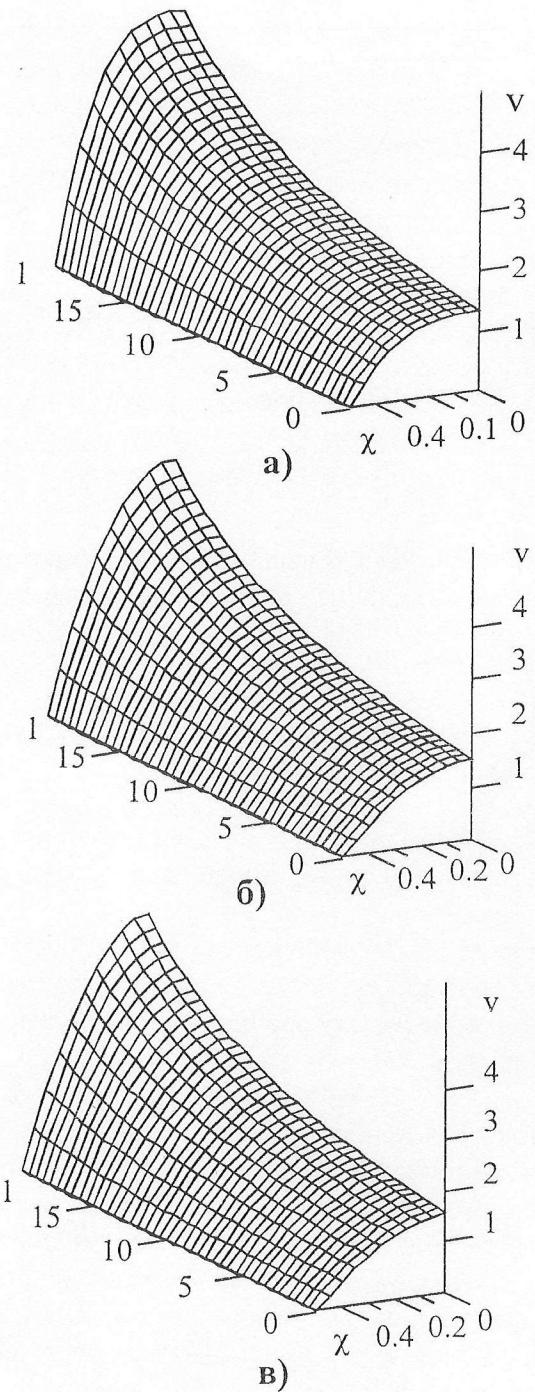


Рис. 3. Распределение безразмерной скорости в канале: а – для жидкости с $n = 0.5$, б – для $n = 1$, в – для с $n = 1.3$

Рассмотрим основные свойства конфузорного течения в кольцевом коническом канале для псевдопластической жидкости с $n = 0.5$, ньютоновской жидкости $n = 1$ и дилатантной жидкости $n = 1.3$.

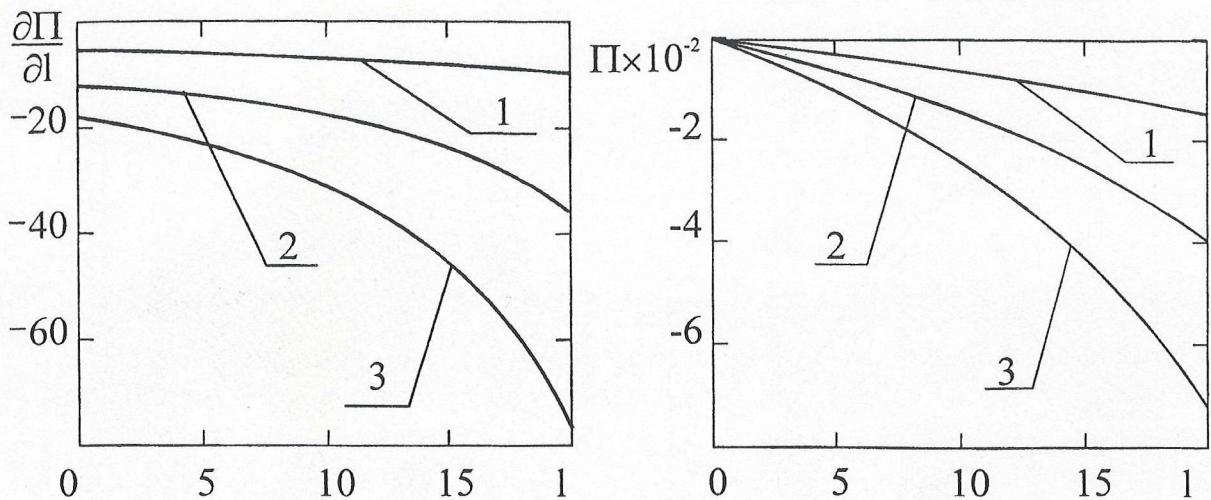


Рис. 4. Распределение безразмерных величин вдоль безразмерной координаты l:
а – градиента давления; б – давления. 1 – для жидкости с индексом течения
 $n = 0.5$; 2 – $n = 1$; 3 – $n = 1.3$

Для псевдопластичной жидкости вследствие нелинейной зависимости $\mu = k \left| \frac{\partial V}{\partial Z} \right|^{n-1}$ вязкость жидкости вблизи стенок канала меньше, чем в центральной области. В результате профиль скорости у вязкопластичной жидкости более наполненный, чем у ньютоновской (рис. 2), что аналогично прямолинейному течению в плоском канале [12]. У дилатантной же жидкости вследствие уменьшения текучести на периферии профиль скорости более вытянут, чем у ньютоновской жидкости (рис. 2). И это соотношение между распределениями скорости рассматриваемых жидкостей сохраняется на протяжении всего канала (рис. 2, 3).

При течении псевдопластической жидкости вязкость у стенок канала, где наблюдается наибольшая в поперечном сечении скорость сдвига, меньше, чем у ньютоновской жидкости, вследствие этого и касательные напряжения на границах канала у псевдопластической жидкости также меньше. Поэтому и модуль градиента давления при течении псевдопластической жидкости меньше (рис. 4а).

Далее вдоль течения средняя скорость жидкости увеличивается, а значит увеличивается скорость деформации сдвига у стенок канала, что ведет к уменьшению вязкости на периферии течения вязкопластичной жидкости, и вследствие этого абсолютная величина градиента давления вниз по течению уменьшается незначительно по сравнению с изменением градиента давления при течении ньютоновской жидкости (рис. 4а). В итоге зависимость безразмерного давления от продольной координаты l при течении псевдопластической жидкости с рассматриваемыми параметрами близка к линейной (рис. 4б).

При течении ньютоновской жидкости модуль градиента давления растет с увеличением средней скорости вдоль течения более значительно, чем у вязкопластичной жидкости (рис. 4а), что приводит к более резкому падению давления вдоль канала (рис. 4б).

При течении дилатантной жидкости модуль градиента давления вследствие повышенной вязкости у стенок канала больше, чем в предыдущих случаях (рис. 4а), поэтому и перепад давления здесь больше. Более того, вниз по течению с ростом средней скорости и скорости сдвига у стенок канала, вязкость на периферии течения

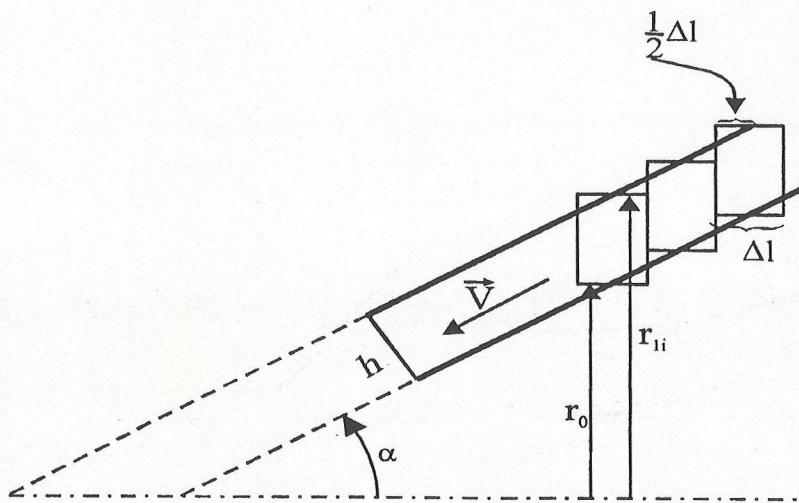


Рис. 5. Аппроксимація соосного коніческого каналу постійної ширини коаксіальними циліндрическими каналами: Δl – длина циліндрическої секції; r_{0i} , r_{ii} – радіуси внутрішнього і зовнішнього циліндрів

[12] Расход степенной жидкости связан с давлением в таком канале соотношением

$$Q = \frac{1}{k^n} \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta l_i} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\pi (r_{ii} + r_{0i})(r_{ii} - r_{0i})^{\frac{1}{n}+2}}{2^{\frac{1}{n}+1} \left(\frac{1}{n} + 2 \right)}, \quad (20)$$

справедливым для $\frac{r_{ii} - r_{0i}}{r_{ii}} < 0.5$ [13].

При разбиении конического канала постоянной ширины h на M цилиндрических каналов, мы получаем общий перепад давления:

$$\Delta P_u = \frac{Q^n k 2^{1+n} \left(\frac{1}{h} + 2 \right) (\cos \alpha)^{1+2n} (R_i - R_0)}{\pi^n M h^{1+2n}} \sum_{i=1}^M \frac{1}{(r_{ii} + r_{0i})^n}. \quad (21)$$

Размерный перепад давления в полученном решении определяется как:

$$\Delta P = \frac{\Pi k V_0^n}{h^n}. \quad (22)$$

Сравнение (21) и (22) для параметров $n = 0.5$, $Q = 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$, $R_0 = 0.1 \text{ м}$, $R_i = 0.3 \text{ м}$, $h = 0.005 \text{ м}$, $k = 6184 \text{ Па}\cdot\text{с}^{0.5}$ показывают, что результаты близки только в узком диапазоне углов раскрытия конических поверхностей (рис. 6). Это связано в основном с тем, что при аппроксимации соосного конического канала соосными цилиндрическими, расходящееся течение заменяется прямолинейным, а при углах раскрытия $2\alpha > 60^\circ$ такая аппроксимация становится физически бессмысленной.

значительно увеличивается, что ведет к монотонно убывающим, нелинейным зависимостям градиента давления и перепада давления вдоль продольной координаты (рис. 4б). Поэтому при течении дилатантной жидкости перепад безразмерного давления в канале наибольший (рис. 4б).

Сравним полученное решение с результатами, получающимися при помощи метода аппроксимации кольцевого конического канала набором соосных цилиндрических каналов [1, 2] (рис. 5).

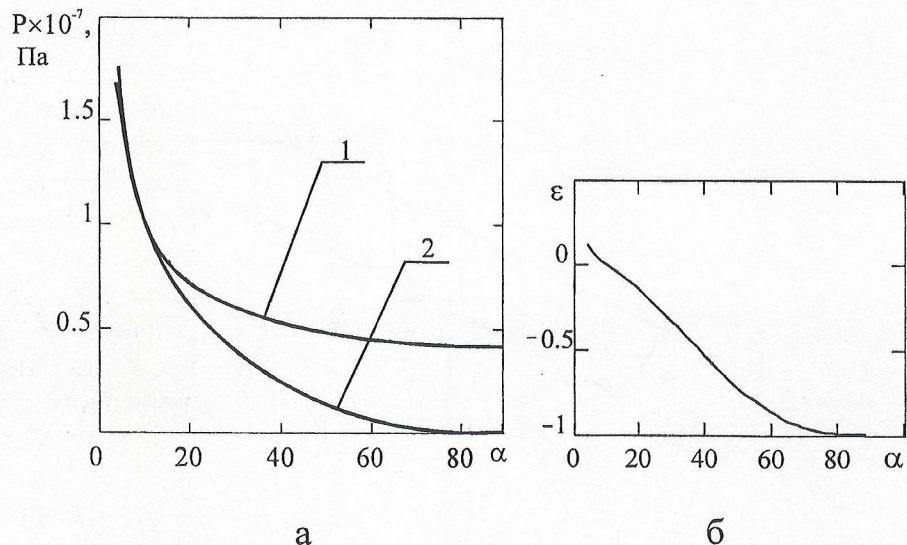


Рис. 6. Зависимость от половины угла раскрытия конических поверхностей:
 а – перепада давления при течении жидкости с параметрами $k = 6184 \text{ Па}\cdot\text{с}^{0.5}$, $n = 0.5$ в соосном коническом канале постоянной ширины с размерами: $R_0 = 0.1 \text{ м}$, $R_1 = 0.3 \text{ м}$, $h = 0.005 \text{ м}$. 1 – расчет по (22), 2 – по (21);
 б – относительного отклонения между величинами (22) и (21)

В том случае, когда образующие конических поверхностей, ограничивающих канал не параллельны, можно воспользоваться методом ступенчатой аппроксимации такого канала соосными коническими каналами постоянной ширины, предложенным автором в работе [3] для диффузорного течения ньютоновских жидкостей и развитым в [6] для расчета задач конвективного теплообмена в кольцевых конических диффузорах. Следуя методу, изложенному в работе [6] будем вычислять ширину каналов из условия равенства средних по длине аппроксимирующего и оригинального участка скоростей жидкости (рис. 7):

$$h_i = \frac{\left(2R_i + \frac{L}{M}\right) \operatorname{tg} \alpha_i}{2} - \left\{ \frac{\left(2R_i + \frac{L}{M}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_i}{4} - \left(2R_i + \frac{L}{M}\right)(h_{0i} - R_i \operatorname{tg} \beta)(\operatorname{tg} \alpha_i - \operatorname{tg} \beta) - \left[R_i^2 + R_i \frac{L}{M} + \frac{1}{3} \left(\frac{L}{M}\right)^2 \right] (2\operatorname{tg} \alpha_i - \operatorname{tg} \beta) \operatorname{tg} \beta + (h_{0i} - R_i \operatorname{tg} \beta)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

где $R_i = R_0 - \frac{L}{M}(i-1)$, $h_{0i} = h_0 - \frac{L}{M}(i-1) \cdot \operatorname{tg} \beta$, $\beta = \alpha_1 - \alpha_2$, M – количество аппроксимирующих секций, h_0 – ширина канала при $R = R_1$.

Такая аппроксимация не заменяет расходящиеся течения прямолинейными, а перепад давления при конфузорном течении в соосном коническом канале переменной ширины вычисляется как:

$$\Delta P = \frac{k 2^{n+1}}{1-n} \left(\frac{2n-1}{n} \right)^n \sum_{i=1}^M \left(\frac{V_{0i}}{h_i} \right)^n \xi_i \left[\left(\frac{\xi_i}{\xi_{i-1}} \right)^{1-n} - 1 \right]. \quad (24)$$

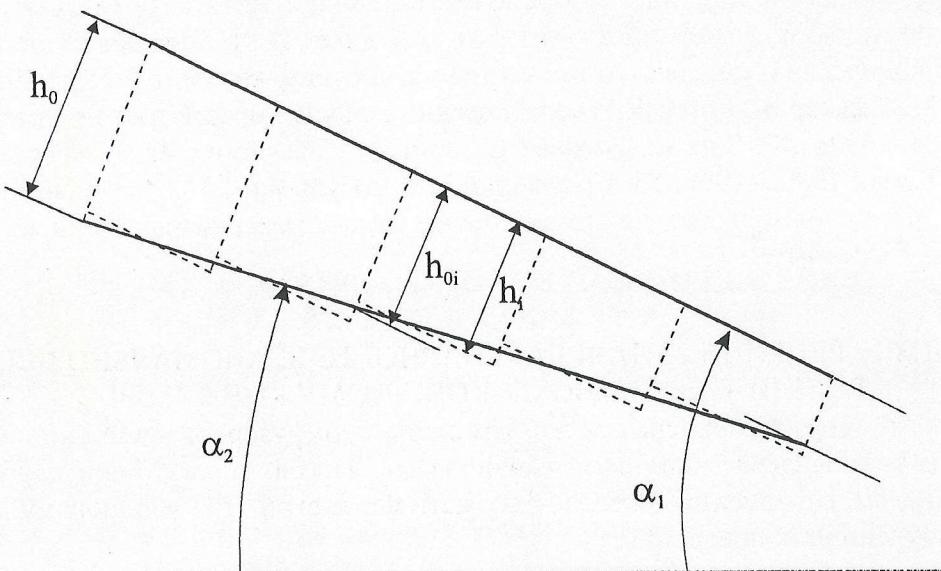


Рис. 7. К расчету течения в кольцевом коническом канале переменной ширины с помощью его аппроксимации кольцевыми коническими каналами постоянной ширины

Расчет перепада давления по (24) при течении полиэтилена высокого давления с параметрами $k = 6184 \text{ Па}\cdot\text{с}^{0.56}$, $n = 0.5$ и расходом $Q = 2.058 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, в коаксиальном коническом канале трубной головки с размерами: $R_i = 0.219 \text{ м}$, $R_o = 0.109 \text{ м}$, $\alpha_1 = 23^\circ$, $\alpha_2 = 16^\circ$, $h_0 = 0.022 \text{ м}$ дает величину $\Delta P \approx 1.67 \times 10^5 \text{ Па}$, что отличается на 16% от значения, приведенного в [4], которое само приводится с точностью 20% от реального.

Заключение

В работе получено решение задачи ламинарного конфузорного течения жидкости Оствальда – де Виля в соосном коническом канале, позволяющее определять параметры течения в широком диапазоне углов раскрытия конических поверхностей.

Обозначения: h – ширина канала, м; k – коэффициент консистенции, $\text{Па}\cdot\text{с}^n$; L – длина образующей канала, м; n – индекс течения; P – давление, Па; Q – расход, $\text{м}^3/\text{с}$; R – радиальная координата, м; V – скорость, $\text{м}/\text{с}$; z – аксиальная координата, м; α – половина угла раскрытия конических поверхностей, рад; μ – вязкость, $\text{Па}\cdot\text{с}$; τ – напряжение сдвига, Па.

Индексы: 0 – характеризует величину на входе в канал; 1 – на выходе из канала; N – для ньютоновской жидкости; R, z – радиальная и аксиальная компонента вектора; ц – относящийся к цилинду.

Литература: 1. Торнер Р.В., Акутин М.С. Оборудование заводов по переработке пластмасс. -М.: Химия, 1986. –400с. 2. Торнер Р.В. Теоретические основы переработки полимеров. -М.: Химия, 1977. –464с. 3. Ульев Л.М. Медленные течения между соосными коническими поверхностями // ИФЖ. –1991. –Т.71, -№6. –С.1092–1098. 4. Ioshi M.V. Dies for Plastic Extrusion. Delhi: Macmillan India Limited. 1984. –Р.176. 5. Ульев Л.М. Медленные течения в коаксиальных конических каналах // Вестник ХГПУ. -1997. –Вып.7. Ч.2. Механика. Машиностроение. –С.23–31. 6. Ульев Л.М. Теплообмен при медленном диффузорном течении жидкости в коаксиальных конических каналах // ТОХТ. –2000. –Т.34, -№1. –С.16–24. 7. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. -М.: Мир. 1964. –216с. 8. Мидлман С. Течение полимеров. -М.: Мир. 1971. –259с. 9. Зубченко А.В., Левин Ю.М., Брехов А.Ф. Расчет потери давления, обусловленного внутрен-

ним трением между цилиндрическими слоями степенной жидкости // Известия Вузов. "Пищевая технология". -1989. -№6. -С.59–61. 10. Ульев Л.М. Течение и теплообмен в кольцевых конических каналах. Апроксимация плоским каналом // ITE. -2000. -№2. -С.55–65. 11. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. -М.: Химия. 1984. -632с. 12. Sors L., Bardocz L., Radnoti I. Plastic molds and dies. Budapest: Akademiai Kiado, 1980. -495р. 13. Смольский Б.М., Шульман З.П., Гориславец В.М. Рединамика и теплообмен нелинейно-вязкопластичных материалов. -Минск: Наука и технология, 1970. -448с.

Л.М.Ульєв

ПРИБЛИЗНЕ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ЛАМІНАРНОЇ ТЕЧІЇ АНОМАЛЬНО В'ЯЗКОЇ РІДИНИ У КІЛЬЦЕВОМУ КОНІЧНОМУ КОНФУЗОРІ

В роботі одержано рішення задачі ламінарної конфузорної течії рідини Оствальда – де Віля в співвісному конічному каналі за допомогою апроксимації цього каналу плоским каналом. Це рішення дозволяє одержати параметри течії у широкому діапазоні кутів розширу конічних поверхонь.

L.M.Ulyev

APPROXIMATE SOLUTION FOR PROBLEM OF THE ABNORMAL VISCOSE LIQUID FLOW IN A CIRCULAR COAXIAL CONE CONFUSER

Approximate solution of laminar flow problem of the Ostwald – De Waele liquid in a circular coaxial cone confuser is found with the help of approximation this channel with the flat channel. The parameters of flow are received for big range aperture angle of the conical surfaces.
