МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
УКРАИНЫ

ISSN 0453-7998
ISSN 0234-5110

ВЕСТНИК

Харьковского Государственного Политехнического Университета

Выпуск 34

ХГПУ 1999

Вісник Харківського державного політехнічного університету. Збірка наукових праць. Випуск 34. — Харків: ХДПУ, 1999. — 97 с.

У віснику представлені теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та підприємств.

Для наукових співробітників, викладачів, аспірантів.

В вестнике представлены теоретические и практические результаты научных исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов.

Адреса редакційної колегії: 310002, м.Харків, вул.Фрунзе, 21, Харківський державний політехнічний університет, тел.: (0572) 40 - 02 - 78.

Рекомендовано до друку Вченою радою ХДПУ, протокол № 6 від 4.06.99р.

$В\ \dfrac{4309010000-053}{99}$ Замовлене

УДК 532.58: 678.027

Л.М. Ульев, канд. техн. наук

МЕДЛЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КОАКСИАЛЬНЫХ КОНИЧЕСКИХ ЩЕЛЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

Розв'язана задача повільної течії ньютоновської рідини у коаксиальних конічних каналах змінної ширини. Отримані зручні залежності для розрахунку перепаду тиснення та швидкості.

Ранее в работах [1,2] автором отмечалась актуальность моделирования медленных течений в проточных деталях химического оборудования, например, в каналах формующего оборудования экструзионных машин. В указанных работах получены аналитические решения для гидродинамических задач медленного течения в каналах между соосными коническими поверхностями с общей вершиной и между эквидистантными коническими поверхностями. Там же предложено решение задачи течения в коаксиальных конических щелях переменной ширины с помощью ступенчатой аппроксимации рассматриваемого канала коаксиальными коническими каналами постоянной ширины. Но при медленных изменениях площади поперечного сечения канала вдоль течения можно получить аналитическое решение гидродинамической задачи для таких каналов.

Следуя [1,2], рассмотрим исследуемое течение в биконических координатах, определяемых преобразованием:

$$z' = R\cos\alpha + X\sin\alpha, \tag{1}$$

$$y' = (R\sin\alpha - X\cos\alpha)\sin\varphi = \Omega\sin\varphi, \tag{2}$$

$$x' = (R\sin\alpha - X\cos\alpha)\cos\varphi = \Omega\cos\varphi, \tag{3}$$

и тогда система уравнений гидродинамики запишется в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial \chi}\left(\sigma\frac{\partial v}{\partial \chi}\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} = \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{\sigma^2}v, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\sigma v) = 0, \tag{6}$$

где $\sigma=\xi\sin\alpha-\chi\cos\alpha$, $\xi=R/h_0$, $\chi=X/h_0$, $V_0= Q/\pi h_0^2(2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha)$, $v=V_R/V_0$, $\Pi=(P-P_0)h_0/\mu V_0$.

Граничными и краевыми условиями являются, условие прилипания на стенках канала и нулевая величина безразмерного давления на входе в канал:

$$v=0, \qquad \chi=0, \tag{7}$$

$$v=0, \qquad \chi=1+a(\xi-\xi_0), \tag{8}$$

$$\Pi=0, \qquad \xi=\xi_0, \tag{9}$$

а также условие постоянства расхода:

$$\int_0^{1+a(\xi-\xi_0)}(\xi\sin\alpha-\chi\cos\alpha)v\,d\chi=\frac{1}{2}(2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha). \tag{10}$$

Величина параметра "a" в (8) и (10) определяется, как угол наклона образующей внутренней стенки канала к образующей внешней стенки (рис. 1).

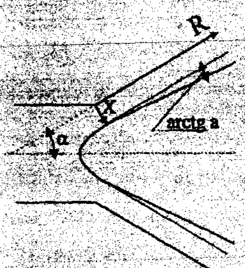

Рис. 1. Поперечное сечение коаксиального конического канала. α- половина угла раскрытия канала; arctg a- угол между образующими поверхностей канала

В работах [1,2] показано, что в практически важных случаях течения, когда $\xi\mathrm{tg}\alpha>>\chi$, система уравнений (4) и (5) редуцируется к одному уравнению:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}=\frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2}, \tag{11}$$

решение которого с условиями (7) и (8) будет иметь вид:

$$v=\frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}\left[\chi^2-(1-a\xi_0+a\xi)\chi\right]. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10), получим выражение для определения градиента давления:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}=\frac{12(2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{[1+a(\xi-\xi_0)]^3\cdot[1-a\xi+\xi(a-2\mathrm{tg}\alpha)]}. \tag{13}$$

Выполняя интегрирование в (13), получим решение задачи (7)-(11):

$$v=\frac{6(2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\frac{\chi^2-[1+a(\xi-\xi_0)]\chi}{[1+a(\xi-\xi_0)]^4-2\xi[1+a(\xi-\xi_0)]^3\mathrm{tg}\alpha}, \tag{14}$$

$$\Pi=\frac{6(2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+a\xi_0)}\left\{\frac{a(\xi-\xi_0)}{1+a(\xi-\xi_0)}\left[\frac{1+\frac{1}{2}a(\xi-\xi_0)}{1+a(\xi-\xi_0)}-\frac{a-2\mathrm{tg}\alpha}{2\mathrm{tg}\alpha(1-a\xi_0)}\right]+\ln\frac{1-2\xi_0\mathrm{tg}\alpha}{a(\xi-\xi_0)+1-2\mathrm{tg}\alpha}\right\},\quad (15)$$

В том случае, когда $a\ll1$, мы можем заменить один из множителей знаменателя приближенным выражением [3] $[1-a(\xi-\xi_0)]^3\approx 1-3a(\xi-\xi_0)$, и тогда после интегрирования (13) получим:

$$\Pi=-\frac{6(2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha)}{\cos\alpha[(3a\xi_0-1)\mathrm{tg}\alpha-a]}\cdot\ln\frac{[1+3a(\xi-\xi_0)](1-2\xi_0\mathrm{tg}\alpha)}{a(\xi-\xi_0)+1-2\mathrm{tg}\alpha}.\quad (16)$$

Легко видеть, что, если в (14)-(16) положить a = 0, мы получим решение задачи медленного течения в коаксиальном коническом канале постоянной ширины [1,2]:

$$v=\frac{6(2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha)}{\cos\alpha-2\xi\sin\alpha}\left(\chi^2-\chi\right),\quad (17)$$

$$\Pi=\frac{6(2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin\alpha}\ln\frac{1-2\xi\mathrm{tg}\alpha}{1-2\xi_0\mathrm{tg}\alpha}.\quad (18)$$

Сравним результаты расчетов перепада давления по формулам (15) и (16) с результатами расчета с помощью ступенчатой аппроксимации [1,2]:

$$\Pi=-\frac{6(2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin\alpha}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\chi_{0i}^3}\ln\frac{\chi_{0i}-2\xi_{i+1}\mathrm{tg}\alpha}{\chi_{0i}-2\xi_i\mathrm{tg}\alpha},\quad (19)$$

где $\chi_{0i}=\chi_{0i-1}+(\xi_i-\xi_{i-1})a$, $\xi_i=\xi_0+\frac{\xi_N'}{N}i$, N- число ступеней. Результаты, получаемые с помощью (19) для течения между соосными конусами с общей вершиной отличаются от точного решения не более, чем на 0,5% при $N\geq 60$ [1,2]

Рассмотрим течение в канале с параметрами: y_0=10, α=15°, и при четырех значениях величины "a": 1)- a = ($-7\cdot10^{-3}$), 2)- $7\cdot10^{-3}$, 3)- ($-3\cdot10^{-3}$), 4)- $3\cdot10^{-3}$. В первых двух случаях ширина канала на длине канала равной $\Delta\xi$ = 100 изменяется на 70% своей величины (уменьшается для a = $-7\cdot10^{-3}$ и увеличивается для a = $7\cdot10^{-3}$), в последних двух случаях ширина канала изменяется почти на треть своего начального значения.

Площадь поперечного сечения коаксиального канала переменной ширины определится выражением:

$$S=\int_0^{h_0[1+a(\xi-\xi_0)]}(R\sin\alpha-X\cos\alpha)dX=\pi h_0^2[1+a(\xi-\xi_0)]\{2\xi\sin\alpha-[1+a(\xi-\xi_0)]\cos\alpha\},\quad (20)$$

что приводит к следующей зависимости средней безразмерной скорости от ξ:

$$\bar{v}=\frac{2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha}{\left[1+a(\xi-\xi_0)\right]\left\{2\xi\sin\alpha-\left[1+a(\xi-\xi_0)\right]\cos\alpha\right\}}. \tag{21}$$

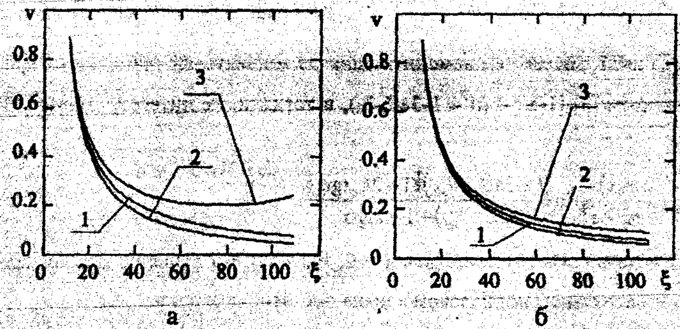

Рис. 2. Изменение средней по поперечному сечению канала безразмерной скорости вдоль канала. а – для течения в канале с $|a|=7\cdot10^{-3}$. 1- а = 0; 2 – а = $7\cdot10^{-3}$; 3 – ($-7\cdot10^{-3}$). б – для течения в канале с $|a|=3\cdot10^{-3}$. 1- а = 0; 2 – а = $3\cdot10^{-3}$; 3 – ($-3\cdot10^{-3}$).

Вследствие малого абсолютного значения величины “а”, в канале с уменьшающейся шириной, площадь поперечного сечения вблизи входа в канал будет увеличиваться вдоль течения, что приводит к уменьшению $\bar{v}$ (рис. 2). На некотором расстоянии от входа площадь S достигает своего максимального значения (соответственно $\bar{v}$ - минимального) и затем начинает уменьшаться, что приводит к увеличению $\bar{v}$, а в целом - к немонотонной зависимости $\bar{v}(\xi)$.

Расстояние, на котором $\bar{v}$ достигает своего минимального значения, можно получить из условия $d\bar{v}/d\xi=0$:

$$\xi'=\frac{(1-a\xi_0)(a\cos\alpha-\sin\alpha)}{a(2\sin\alpha-a\cos\alpha)}, \tag{22}$$

и при $a=-7\cdot10^{-3}$, $\xi=77{,}41$.

Перепад давления в канале с $a=-7\cdot10^{-3}$ увеличивается вдоль течения значительно сильнее, чем в канале постоянной ширины (рис. 3). Если в канале с a = 0 модуль градиента давления вдоль канала монотонно уменьшается, то при $a=-7\cdot10^{-3}$ его зависимость от ξ немонотонна. Вблизи входа в канал $\left|\frac{d\Pi}{d\xi}\right|$ уменьшается, но, начиная с некоторого расстояния ξ'', модуль градиента давления начинает расти, и зависимость ($-\Pi(\xi)$) становится более крутой (рис. 3). Точку перегиба функции $\Pi(\xi)$ можно определить с помощью (13), положив $\frac{d^2\Pi}{d\xi^2}=0$, получим:

$$\xi'' = \frac{(a\xi_0 - 1)(2a - tg\alpha)}{2a(a - 2tg\alpha)}. \qquad (23)$$

В рассматриваемом случае $\xi'' \approx 39{,}7$. Значения ξ' и ξ'' не совпадают потому, что зависимость градиента давления от продольной координаты (13) более сильная, чем зависимость средней скорости (21).

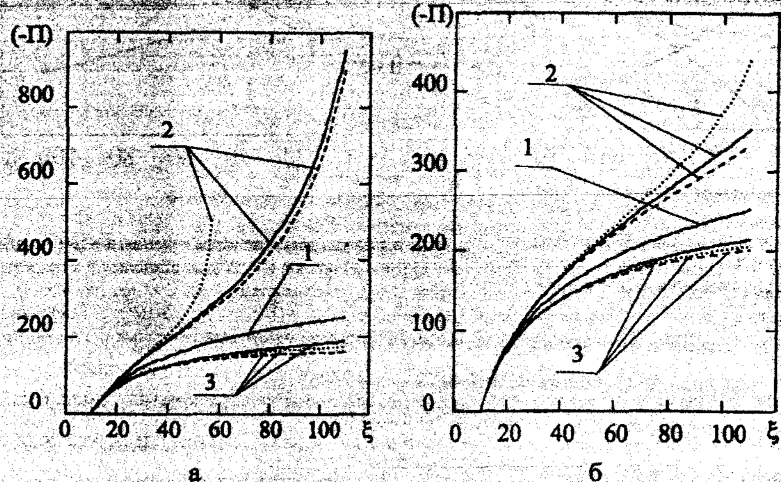

Рис. 3. Распределение безразмерного давления вдоль канала. Сплошная линия – расчет по (15), пунктирная – по (16), штриховая – по (19). а – для течения в канале с $|a| = 7\cdot10^{-3}$. 1- $a = 0$; 2 – $a = 7\cdot10^{-3}$; 3 – $(-7\cdot10^{-3})$. б – для течения в канале с $|a| = 3\cdot10^{-3}$. 1- $a = 0$; 2 – $a = 3\cdot10^{-3}$; 3 – $(-3\cdot10^{-3})$

Сравнение значений П, рассчитанных по (15) и (19), дает хорошее согласие (рис. 3,4), а вычисление П с помощью (16) при $a<0$ может привести к значительным ошибкам (рис. 3).

При течении в канале с $a = 7\cdot10^{-3}$ площадь поперечного сечения канала будет монотонно расти с увеличением ξ, и это увеличение площади несколько сильнее, чем при течении в канале постоянной ширины, вследствие чего средняя скорость уменьшается быстрее вдоль течения (рис. 2). Перепад давления в этом случае также меньше, чем в канале постоянной ширины (рис. 3). Интересно отметить, что в этом случае согласие расчета перепада давления между (16) и (19) лучше, чем между (15) и (19) (рис. 3, 4).

В случае течения с более слабым изменением ширины канала вдоль течения картина течения качественно не изменяется (рис.2-4(б)). Отклонения в результатах расчета давления по (15) и (16) от расчета по (19) становятся меньше (рис. 3,4). Также, как и в предыдущих случаях, при течении в канале с уменьшением ширины вдоль течения (для диффузорного течения) лучшее приближение дает расчет по (15), а при увеличении ширины - по (16) (рис. 3,4).

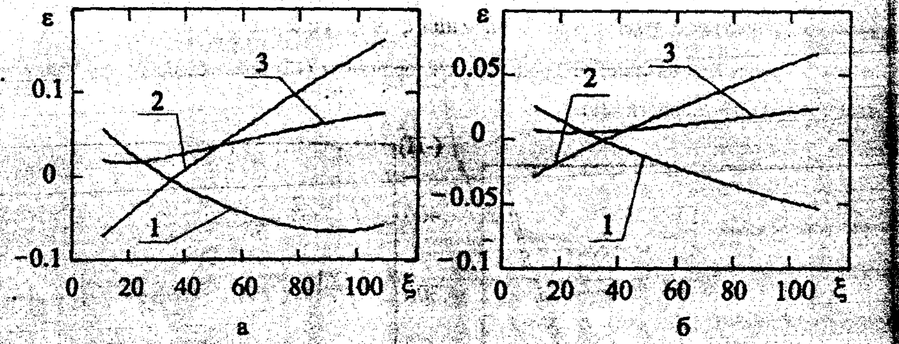

Рис. 4. Распределение относительного отклонения в расчетах давления вдоль течения. а – для каналов с с $|a| = 7\cdot10^{-3}$. 1-отклонение между зависимостями (15) и (19) при $a = (-7\cdot10^{-3})$; 2- отклонение между зависимостями (15) и (19) при $a = 7\cdot10^{-3}$; 3 - отклонение между зависимостями (1) и (19) при $a = 7\cdot10^{-3}$. б – для каналов с с $|a| = 3\cdot10^{-3}$. 1-отклонение между зависимостями (15) и (19) при $a = (-3\cdot10^{-3})$; 2- отклонение между зависимостями (15) и (19) при $a = 3\cdot10^{-3}$; 3 - отклонение между зависимостями (1) и (19) при $a = 3\cdot10^{-3}$

Вычисления показывают, что изменения величины угла раскрытия канала α качественных изменений в распределение давления не вносит. Отметим здесь, что если положить α = 90°, мы получим соотношения, описывающие радиальные течение между плоскостью и конусом с осью перпендикулярной плоскости и произвольно расположенной вершиной.

Приведенные в работе результаты значительно упрощают в некоторых случаях исследование и расчет течения в проточных элементах формующего оборудования экструзионных машин.

Обозначения

P, P_0- давление текущее и на входе, Па; Q-объёмный расход, $м^3/с$; R, R_0, - координата радиальная и входа в канал, м; h_0-начальная ширина канала, м; x', y', z'- декартовы координаты, м; α- половина угла раскрытия конуса, рад; μ- вязкость, Па·с; θ-угловая координата, рад; X- поперечная биконическая координата, м.

Список литературы: 1. *Ульев Л.М.* Медленные течения между соосными коническими поверхностями // Инж. –физ. журн. –1998. –Т. 71, №. 6. –С. 1092- 1098. 2. *Ульев Л.М.* Медленные течения в коаксиальных конических каналах // Вестник ХГПУ. – 1997. – Вып. 7. Ч. 2. Механика. Машиностроение. – С. 22-31. 3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Госиздат. физ.- мат. лит. 1962. – С. 608.

Поступила в редколлегию 15.04.99