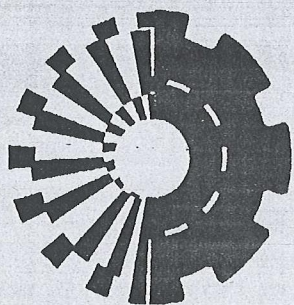


**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
УКРАИНЫ**

ISSN 0453-7998

ISSN 0234-5110

# ВЕСТНИК



**Харьковского  
Государственного  
Политехнического  
Университета**

---

**Выпуск 56**

**ХГПУ 1999**

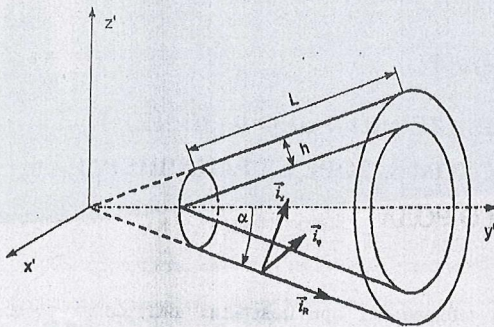
*Л.М. Ульєв, канд. техн. наук*

## ТЕПЛООБМЕН ПРИ МЕДЛЕННОМ ДИФFUЗОРНОМ ТЕЧЕНИИ В КОНИЧЕСКОМ ЗАЗОРЕ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА

Розглянута задача конвективного теплообміну при повільних дифузорних течіях у коаксіальних кільцевих конічних каналах ширина яких стала величина. Рішення для теплових межових умов першого роду одержано методом розділення перемінних. Температурна залежність від координат надана у вигляді нескінченного ряду за конфлюентними гіпергеометричними функціями від поперечної координати, які помножені на експоненціальну залежність від поздовжньої. Рішення інтересно тим що є суперпозицією двох рішень, кожне з яких має власні функції та власні значення. Розглянуто особливості теплообміну на межах каналу.

Для выбора оптимальных конструктивных и технологических параметров экструзионных головок необходимо знать особенности течения и теплообмена расплава в проточных элементах формующего оборудования. При экструзионном способе производства стренг, гранул, труб, пленок и т.д. расплав полимера на распределительном участке формующего оборудования течет в коаксиальном коническом канале, образованном конусом головки и дорном [1,2], где расплав может охлаждаться или нагреваться. Современные технологии позволяют поддерживать различные режимы теплообмена на границах каналов, но экспериментальный подбор оптимальных характеристик процесса требует значительных средств. Построение численных моделей процессов переработки также не всегда оправдано, т.к. во многих случаях можно получить адекватные соотношения между параметрами процессов, используя аналитические решения. Эти же решения можно использовать как тестовые задачи при отладке численных кодов.

Автором в работах [3,4] решена задача изотермического течения в коаксиальных конических каналах с различным расположением граничных поверхностей. В [5,6] построена модель течения и теплообмена в конических зазорах при граничных условиях третьего рода. В данной работе исследуется теплообмен в коаксиальных конических каналах с граничными условиями первого рода для расплавов полимеров, которые в пределах изменения параметров переработки ведут себя как ньютоновские жидкости [7]. В [5] показано, что для практически интересных расходов жидкости и



размеров канала [3,4], число Рейнольдса  $Re \ll 1$ , Неме Гриффита  $Gn \ll 1$ , Пекле  $Pe > 100$ . Данные оценки позволяют рассматривать течение расплава как ползущее течение [8], а уравнении теплопереноса не учитывать теплоту диссипации

Рис. 1. Геометрия конического зазора постоянной ширины, пренебречь изменением  $L$  - длина конической части канала,  $m$ ;  $h$  - ширина зазора,  $m$ ; кондуктивного теплового потока  $i_R, i_\chi, i_\varphi$  - орты в биконической системе координат вдоль течения по сравнению с изменением конвективного теплового потока и, в итоге записать систему уравнений аксиально-симметричного конвективного теплообмена в биконической системе координат (рис. 1), определяемых преобразованием [9]:

$$z' = R \cos \alpha + X \sin \alpha, \quad (1)$$

$$y' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \sin \varphi, \quad (2)$$

$$x' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \cos \varphi, \quad (3)$$

в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sigma \frac{\partial v}{\partial \chi} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} = \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sigma^2} v, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\sigma v) = 0, \quad (6)$$

$$Pe_0 \cdot v \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \right); \quad (7)$$

где  $\xi = R/h$ ,  $\chi = X/h$ ,  $V_0 = Q/\pi h(2R_0 \sin \alpha - h \cos \alpha)$ ,  $v = V_R/V_0$ ,  $\Pi = (P - P_0)h/\gamma V_0$ ,  $\sigma = \xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha$ ,  $Pe_0 = V_0 h/a$ ,  $\Theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ ,  $T_1$  - температура поверхности канала, образованной внешним конусом.

Граничные и краевые условия запишутся в виде:

$$v = 0, \quad \chi = 0, \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1, \quad (8)$$

$$v = 0, \quad \chi = 1, \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1, \quad (9)$$

$$\Pi = 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad \xi = \xi_0, \quad (10)$$

$$\Theta = 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad \xi = \xi_0, \quad (11)$$

$$\Theta = 1, \quad \chi = 0, \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1, \quad (12)$$

$$\Theta = \Theta_2, \quad \chi = 1, \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1. \quad (13)$$

Для практически важных случаев, когда  $\xi \operatorname{tg} \alpha \gg 1$ , решение системы уравнений (4)-(6), (8)-(11) в принятых обозначениях имеет вид [3]:

$$v = \frac{6(2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)}{\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha} (\chi^2 - \chi), \quad (14)$$

$$\Pi = \frac{6(\cos \alpha - 2\xi_0 \sin \alpha)}{\sin \alpha} \ln \frac{1 - 2\xi \operatorname{tg} \alpha}{1 - 2\xi_0 \operatorname{tg} \alpha}, \quad (15)$$

и тогда уравнение (7) примет вид:

$$\frac{6\operatorname{Re}_0(2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)}{\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha} (\chi^2 - \chi) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \chi^2}. \quad (16)$$

Для того, чтобы получить решение задачи (16), (12), (13), представим его в виде линейной суперпозиции двух решений:

$$\Theta(\xi, \chi) = \frac{1 + \Theta_2}{2} \Xi_1(\xi, \chi) + \frac{1 - \Theta_2}{2} \Xi_2(\xi, \chi), \quad (17)$$

где  $\Xi_1(\xi, \chi)$  – это решение уравнения (16) для граничных условий:

$$\Xi_1(\xi, \chi) = 1, \quad \chi = 0, \quad (18)$$

$$\Xi_1(\xi, \chi) = 1, \quad \chi = 1, \quad (19)$$

и условия (11), а  $\Xi_2(\xi, \chi)$  – решение (16) для условий:

$$\Xi_2(\xi, \chi) = 1, \quad \chi = 0, \quad (20)$$

$$\Xi_2(\xi, \chi) = -1, \quad \chi = 1, \quad (21)$$

и условия (11).

Для решения задач (16), (11), (18), (19) и (16), (11), (20), (21) методом разделения переменных введем новые зависимые переменные, определяемые преобразованиями:

$$\Xi_1(\xi, \chi) = \Phi_1(\xi, \chi) + 1, \quad (22)$$

$$\Xi_2(\xi, \chi) = \Phi_2(\xi, \chi) + 1 - 2\chi. \quad (23)$$

Функции  $\Phi_i(\xi, \chi)$  (здесь и далее  $i = 1, 2$ ) удовлетворяют уравнению (16) и преобразуют неоднородные граничные условия (18), (19) и (20), (21) в однородные:

$$\Phi_i(\xi, \chi) = 0, \quad \chi = 0, \quad (24)$$

$$\Phi_i(\xi, \chi) = 0, \quad \chi = 1, \quad (25)$$

а условие на входе в канал (11) преобразуется к виду:

$$\Phi_1(\xi, \chi) = -1, \quad \xi = \xi_0, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad (26)$$

$$\Phi_2(\xi, \chi) = 2\chi - 1, \quad \xi = \xi_0, \quad 0 \leq \chi \leq 1. \quad (27)$$

В результате мы получили две краевые задачи с нулевыми граничными условиями первого рода и различными начальными условиями. В первом случае это константа (26), а во втором – нечетная функция (27). Последнее замечание будет использовано при построении общего решения.

Поскольку функции  $\Phi_i$  являются решением уравнения (16) с одинаковыми граничными условиями, мы для получения фундаментального решения (16) формально не будем их различать (для краткости) и представим их в виде произведения  $\Phi(\xi, \chi) = Y(\xi) \cdot \Psi(\chi)$ , подставляя которое в (16), получим:

$$\text{БРе}_0 \frac{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha} \frac{dY}{Y} = \beta^2 d\xi, \quad (28)$$

$$\Psi'' - \beta^2(\chi^2 - \chi)\Psi = 0, \quad (29)$$

где  $\beta^2$  – постоянная разделения, положительная величина вследствие того, что по условию задачи температура в канале должна быть конечной величиной при любых возможных значениях  $\xi$ .

Решение (28) есть:

$$Y = A \exp \left[ - \frac{\beta^2 (\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha)^2}{24 \text{Ре}_0 \sin \alpha (2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)} \right], \quad (30)$$

где  $A$  – произвольная постоянная.

Делая замену переменных  $t = 2\chi - 1$ ,  $\beta = 4\mu$ , перепишем уравнения (29) и граничные условия, которым должно удовлетворять его решение в виде, необходимом для дальнейшего исследования:

$$\Psi'' + \mu^2(1 - t^2)\Psi = 0, \quad (31)$$

$$\Psi = 0, \quad t = -1, \quad (32)$$

$$\Psi = 0, \quad t = 1. \quad (33)$$

В [5] показано, что уравнение (31) сводится к уравнению Уиттекера и имеет решение:

$$\Psi(t) = C_1 \sqrt{\mu} \exp \left( - \frac{\mu t^2}{2} \right) {}_1F_1 \left( \frac{3 - \mu}{4}, \frac{3}{2}; \mu t^2 \right) + C_2 \exp \left( - \frac{\mu t^2}{2} \right) {}_1F_1 \left( \frac{1 - \mu}{4}, \frac{1}{2}; \mu t^2 \right), \quad (34)$$

где  ${}_1F_1(\alpha, \gamma; x)$  – вырожденная гипергеометрическая функция;  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Подставляя (34) в (32) и (33), получим:

$$-C_1\sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu}{4}, \frac{3}{2}; \mu\right) + C_2\sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu}{4}, \frac{1}{2}; \mu\right) \doteq 0, \quad (35)$$

$$C_1\sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu}{4}, \frac{3}{2}; \mu\right) + C_2\sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu}{4}, \frac{1}{2}; \mu\right) = 0. \quad (36)$$

Очевидно, что уравнения (35) и (36) совместны только, когда  $C_1=0$  или  $C_2=0$ . В первом случае уравнение для определения собственных значений имеет вид:

$${}_1F_1\left(\frac{1-\mu}{4}, \frac{1}{2}; \mu\right) = 0, \quad (37)$$

и собственными функциями задачи являются функции:

$$\Psi_{1n} = C \exp\left(-\frac{\mu_{1n} t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu_{1n}}{4}, \frac{1}{2}; \mu_{1n} t^2\right). \quad (38)$$

При  $C_2=0$  собственные значения определяются из уравнения:

$${}_1F_1\left(\frac{3-\mu}{4}, \frac{3}{2}; \mu\right) = 0, \quad (39)$$

и тогда собственными функциями будут функции:

$$\Psi_{2n} = C\sqrt{\mu_{2n}} \exp\left(-\frac{\mu_{2n} t^2}{2}\right) t {}_1F_1\left(\frac{3-\mu_{2n}}{4}, \frac{3}{2}; \mu_{2n} t^2\right). \quad (40)$$

Заметим, что значение  $\mu_n$  можно с приемлемой для расчетов точностью вычислить, используя соотношение [10]  $\mu_{1n} = 4n+5/3$ , и, как показывают расчеты при  $n > 4$ , выполняется равенство  $\mu_{2n} = \mu_{1n}+2$ .

Используя (31)- (33), легко показать, что системы функций, определяемые равенствами (37) и (39), являются ортогональными с весом  $(1-t^2)$  на отрезке  $[-1, 1]$ .

Решение задачи (16), (24), (25) будет являться суммой всех частных решений и, учитывая, что  $t = 2\chi-1$ , запишем его в виде:

$$\Phi_i(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{in} \exp\left[-\frac{2\mu_{in}^2 (\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha)^2}{3Pe_0 \sin \alpha (2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)}\right] \Psi_{in}. \quad (41)$$

Значения  $A_{in}$  определим, используя свойство ортогональности собственных функций и условия (26), (27):

$$A_{in} = \exp\left[\frac{2\mu_{in}^2 (\cos \alpha - 2\xi_0 \sin \alpha)^2}{3Pe_0 \sin \alpha (2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)}\right] \frac{\int_{-1}^1 \Phi_i(\xi_0, t) \cdot (1-t^2) \cdot \Psi_{in}(t) \cdot dt}{\|\Psi_{in}\|} = \exp\left[\frac{2\mu_{in}^2 (\cos \alpha - 2\xi_0 \sin \alpha)^2}{3Pe_0 \sin \alpha (2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)}\right] A'_n, \quad (42)$$

где  $\|\Psi_{in}\| = \int_{-1}^1 (1-t^2) \Psi_{in}^2 dt$  - норма собственных функций.

Функция  $1-t^2$  является четной на отрезке  $[-1, 1]$ , а  $\Phi_1(\xi_0, t)$  – постоянная величина, и тогда, если выбрать в качестве базиса для решения задачи (16), (24)–(26) функции, определяемые соотношениями (42), (43)' – нечетные на этом отрезке, мы получим, что все  $A_{1n} = 0$ , и приходим к тривиальному решению уравнения (16).

Поэтому, в качестве ортогонального базиса в этом случае, выберем систему функций, определяемую соотношениями (40), (41).

Аналогично для решения задачи (16), (24), (25), (27), где  $\Phi_2(\xi_0, t)$  – нечетные функции на отрезке  $[-1, 1]$ , в качестве базисных функций выберем нечетные функции (42), (43) и, переходя к переменным  $\xi, \chi, \Theta$ , запишем общее решение задачи (16), (11)–(13):

$$\Theta(\xi, \chi) = 1 - (1 - \Theta_2)\chi + \frac{1 + \Theta_2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A'_{1n} E_{1n} F_1\left(\frac{1 - \mu_{1n}}{4}, \frac{1}{2}; \mu_{1n} (2\chi - 1)^2\right) + \\ + \frac{1 - \Theta_2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A'_{2n} E_{2n} \sqrt{\mu_{2n}} (2\chi - 1) F_1\left(\frac{3 - \mu_{2n}}{4}, \frac{3}{2}; \mu_{2n} (2\chi - 1)^2\right), \quad (43)$$

$$\text{где } E_n(\xi, \chi) = \exp\left\{\frac{8\mu_n^2(\xi - \xi_0)[\cos \alpha - (\xi + \xi_0)\sin \alpha]}{3Pe} - \frac{\mu_n(2\chi - 1)^2}{2}\right\}, \quad A'_{1n} = -\frac{\int_{-1}^1 (1 - t^2) \cdot \Psi_{1n}(t) \cdot dt}{\|\Psi_{1n}\|},$$

$$A'_{2n} = -\frac{\int_{-1}^1 t(1 - t^2) \cdot \Psi_{2n}(t) \cdot dt}{\|\Psi_{2n}\|} \text{ и введено обозначение } Pe = \frac{Q}{\pi a h}, \text{ и тогда } Pe_0 = \frac{Pe}{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha}.$$

Используя (46), мы можем вычислить среднемассовую температуру потока:

$$\bar{\Theta} = \frac{2\pi \int_0^1 v \Theta(\xi, \chi) (\xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha) d\chi}{\bar{v} \pi (2\xi \sin \alpha - \cos \alpha)} = \frac{12}{\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha} \int_0^1 (\chi^2 - \chi) \Theta(\xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha) d\chi, \quad (44)$$

$$\text{где } \bar{v} = \frac{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha}{2\xi \sin \alpha - \cos \alpha} - \text{средняя безразмерная скорость.} \quad (45)$$

При определении безразмерных местных тепловых потоков на границах канала – чисел Нуссельта  $Nu$  традиционным способом, т.е. относя коэффициенты теплоотдачи к разности между среднемассовой температурой потока и температурой стенки

$$Nu_1 = \frac{\alpha_1 h}{\lambda} = \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0}, \quad Nu_2 = \frac{\alpha_2 h}{\lambda} = -\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1}, \quad (46)$$

числа  $Nu_i$  могут иметь разрывы для значений координаты  $\xi$ , при которых среднемассовая температура сравнивается с температурой одной из стенок. Это может произойти и

в том случае, если коэффициент теплоотдачи отнести к разности между среднемассовой температурой и средней температурой стенок, начальной или текущей. Поэтому, определим безразмерные коэффициенты теплоотдачи как отношение тепловых потоков на границах канала к масштабу обезразмеривания температуры:

$$Nu^* = - \frac{\partial \Theta}{\partial n} \Big|_{n=0}, \quad (47)$$

где  $n$  – нормаль, направленная в сторону жидкости, и тогда получим сравнимые выражения, определяющие безразмерные тепловые потоки на границах канала

$$Nu_1^* = - \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0}, \quad Nu_2^* = \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1}. \quad (48)$$

Выполняя дифференцирование в (49), получим:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} = (1 - \Theta_2)(S_2 - 1) - (1 + \Theta_2)S_1, \quad (49)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} = (1 - \Theta_2)(S_2 - 1) + (1 + \Theta_2)S_1, \quad (50)$$

$$\text{где } S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A'_{1n} \mu_{1n} E_{1n}(\xi, 0) \left[ (1 - \mu_{1n}) {}_1F_1 \left( \frac{5 - \mu_{1n}}{4}, \frac{3}{2}; \mu_{1n} \right) - {}_1F_1 \left( \frac{1 - \mu_{1n}}{4}, \frac{1}{2}; \mu_{1n} \right) \right],$$

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A'_{2n} \sqrt{\mu_{2n}} E_{2n}(\xi, 0) \left[ (1 - \mu_{2n}) {}_1F_1 \left( \frac{3 - \mu_{2n}}{4}, \frac{3}{2}; \mu_{2n} \right) + \frac{\mu_{2n}(3 - \mu_{2n})}{3} {}_1F_1 \left( \frac{7 - \mu_{2n}}{4}, \frac{5}{2}; \mu_{2n} \right) \right],$$

$$E_{in}(\xi, 0) = \exp \left\{ \frac{8\mu_{in}^2 (\xi - \xi_0) [\cos \alpha - (\xi + \xi_0) \sin \alpha]}{3Pe} - \frac{\mu_{in}}{2} \right\}.$$

Параметрами, определяющими решение задачи, являются: число  $Pe$ , безразмерная температура внутренней стенки  $\Theta_2$ , безразмерная координата входа в канал  $\xi_0$  и угол раствора диффузора  $2\alpha$ .

Решение при  $\Theta_2 = 0$  определяет особенности теплообмена при течении в канале, температура внутренней стенки (границы при  $\chi = 1$ ) которого равна температуре жидкости, поступающей в канал. Жидкость нагревается, если  $T_1 > T_0$ , и остывает при  $T_1 < T_0$ . Такие условия могут быть реализованы, например, в трубных головках с хорошей теплоизоляцией дорна.

При больших значениях числа  $Pe \sim 7 \cdot 10^4$  в пределах канала преобладает конвективный теплоперенос, и тепловой пограничный слой не успевает распространиться на значительное расстояние от внешней стенки и течение происходит на начальном



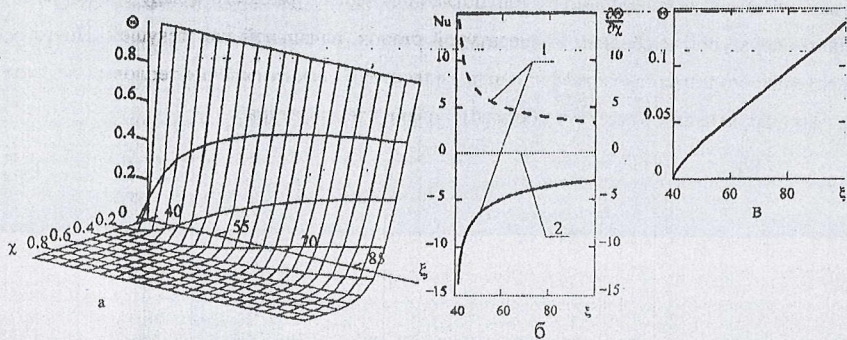


Рис. 2. Распределение безразмерных величин при течи с параметрами:  $\xi_0 = 40$ ,  $Re = 7 \cdot 10^4$ ,  $\Theta_2 = 0$ ,  $\alpha = 15^\circ$ . а – распределение температуры; б – распределение чисел Нуссельта  $Nu$  – штриховая линия и производных  $\partial\Theta/\partial\chi$  на границах – сплошные линии. 1 – на границе  $\chi = 0$ , 2 –  $\chi = 1$ ; в – среднemasсовой температуры.

тепловом участке (рис. 2). Число Нуссельта на внешней стенке канала существенно уменьшается вдоль течения, но на длине канала не достигает своего предельного значения, а на внутренней стенке канала в этом случае теплообмен отсутствует, поперечная производная от температуры и число  $Nu$  здесь равны 0 (рис. 2).

Уменьшение числа  $Re$  до значения  $10^4$  при сохранении остальных параметров приводит к уменьшению длины начального теплового участка и тепловой пограничный слой распространяется на все поперечное сечение канала (рис. 3).

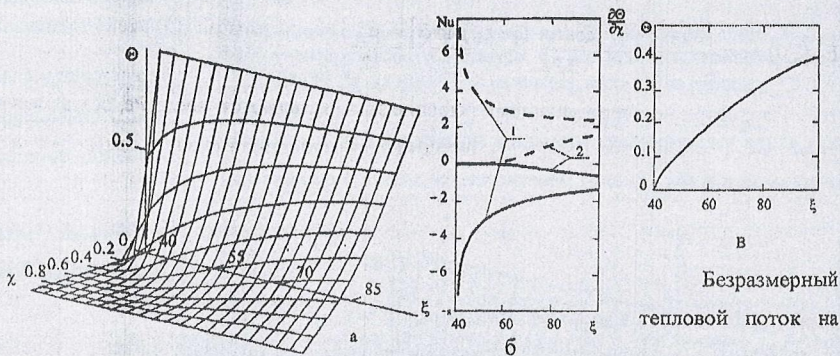


Рис. 3. Распределение безразмерных величин при течи с параметрами:  $\xi_0 = 40$ ,  $Re = 10^4$ ,  $\Theta_2 = 0$ ,  $\alpha = 15^\circ$ . а – распределение температуры; б – распределение чисел Нуссельта  $Nu$  – штриховые линии и производных  $\partial\Theta/\partial\chi$  на границах – сплошные линии. 1 – на границе  $\chi = 0$ , 2 –  $\chi = 1$ ; в – среднemasсовой температуры.

границе  $\chi = 1$  становится значительно меньше, но не достигает своего предельного значения. На 1/3 длины канала становится существенным тепловой поток на

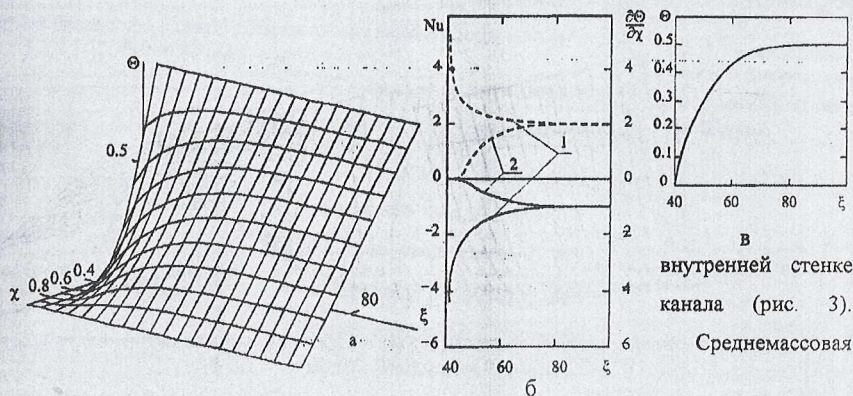


Рис. 4. Распределение безразмерных величин при течении с параметрами:  $\xi_0 = 40$ ,  $Pe = 2 \cdot 10^3$ ,  $\Theta_2 = 0$ ,  $\alpha = 15^\circ$ . а – распределение температуры; б – распределение чисел Нуссельта  $Nu$  – штриховые линии и производных  $\partial\Theta/\partial\chi$  на границах – сплошные линии. 1– на границе  $\chi = 0$ , 2 –  $\chi = 1$ ; в – среднемассовой температуры.

безразмерная температура жидкости увеличивается вдоль канала более значительно по сравнению с предыдущим случаем (рис. 3). Но и в этом случае стабилизации теплооб-

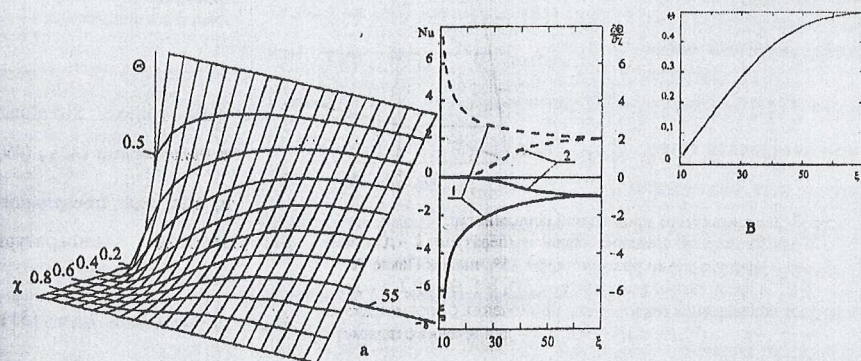


Рис. 5. Распределение безразмерных величин при течении с параметрами:  $\xi_0 = 10$ ,  $Pe = 2 \cdot 10^3$ ,  $\Theta_2 = 0$ ,  $\alpha = 15^\circ$ . а – распределение температуры; б – распределение чисел Нуссельта  $Nu$  – штриховые линии и производных  $\partial\Theta/\partial\chi$  на границах – сплошные линии. 1– на границе  $\chi = 0$ , 2 –  $\chi = 1$ ; в – среднемассовой температуры.

мена в пределах канала не происходит.

Дальнейшее уменьшение числа  $Pe$  приводит к тому, что основную роль в теплообмене начинает играть кондуктивный теплоперенос, и, например, при  $Pe = 2 \cdot 10^3$  тепловой пограничный слой уже вблизи входа распространяется на все поперечное сечение потока (рис. 4). Числа Нуссельта достигают своего предельного значения  $Nu_{1\infty} =$

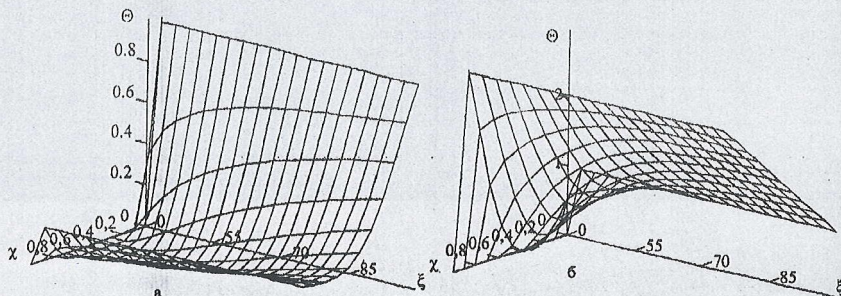


Рис. 6. Распределение безразмерной температуры в канале с безразмерными параметрами  $\xi_0 = 40$ ,  $\xi_1 = 100$ . а -  $\alpha = 15^\circ$ ,  $Re = 2 \cdot 10^4$  и  $\Theta_1 = 1$ ,  $\Theta_2 = 0,2$ ; б -  $\alpha = 90^\circ$ ,  $Re = 10^4$  и  $\Theta_1 = 1$ ,  $\Theta_2 = 3$

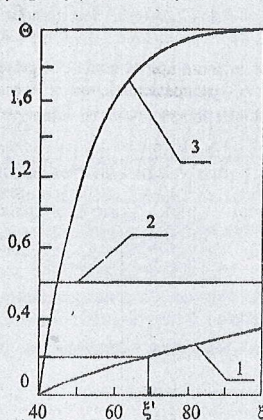
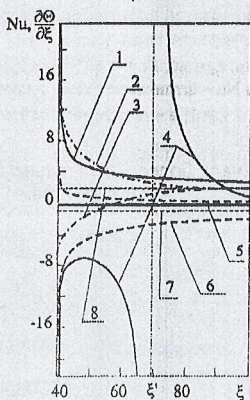


Рис. 7. Зависимости от продольной координаты:

а - безразмерной среднemasовой температуры: 1 - для течения в канале с углом раскрытия  $\alpha = 15^\circ$ , числом Пекле  $Re = 2 \cdot 10^4$  и граничными температурами  $\Theta_1 = 1$ ,  $\Theta_2 = 0,2$ . 2 - для установившегося теплообмена при течения с параметрами  $\alpha = 15^\circ$ ,  $Re = 2 \cdot 10^4$ ,  $\Theta_1 = 1$ ,  $\Theta_2 = 0,2$ . 3 - для течения с параметрами  $\alpha = 90^\circ$ ,  $Re = 10^4$ ,  $\Theta_1 = 1$ ,  $\Theta_2 = 3$ .

б - чисел Нуссельта (1.4) и производных на границах  $\frac{\partial \Theta}{\partial \chi}$  (2,3, 5-8). 1 -  $Nu_x$  и 4 -  $Nu_x$  для течения в канале с углом раскрытия  $\alpha = 15^\circ$ , числом  $Re = 2 \cdot 10^4$  и  $\Theta_1 = 1$ ,  $\Theta_2 = 0,2$ . 2 -  $\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0}$  и 3 -  $\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1}$  при параметрах  $\alpha = 90^\circ$ ,  $Re = 10^4$  и  $\Theta_1 = 1$ ,  $\Theta_2 = 3$ ; 5 -  $\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0}$  и 6 -  $\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1}$  при параметрах  $\alpha = 15^\circ$ ,  $Re = 2 \cdot 10^4$  и  $\Theta_1 = 1$ ,  $\Theta_2 = 0,2$ ; 7, 8 - предельные значения производных

$Nu_{2\infty} = 2$ , а среднemasовая температура  $\bar{\Theta}_\infty \rightarrow 0,5$  (рис. 4). Из (43) видно, что при уменьшении  $Re$  или увеличении  $\xi$  все множители  $E_m \rightarrow 0$ , т.е. при установившемся теплообмене становится существенным только линейный член разложений (43), (49),

(50), и мы для предельного

распределения температуры получим:

$$\Theta_\infty(\xi, \chi) = 1 - (1 - \Theta_2)\chi, \quad (51)$$

или при  $\Theta_2 = 0$  имеем

$$\Theta_\infty(\xi, \chi) = 1 - \chi. \text{ И несмотря на}$$

то, что распределение скорости (14) в нашей модели симметрично относительно срединной поверхности канала, безразмерная среднemasовая температура стремится к своему предельному значению 0,5

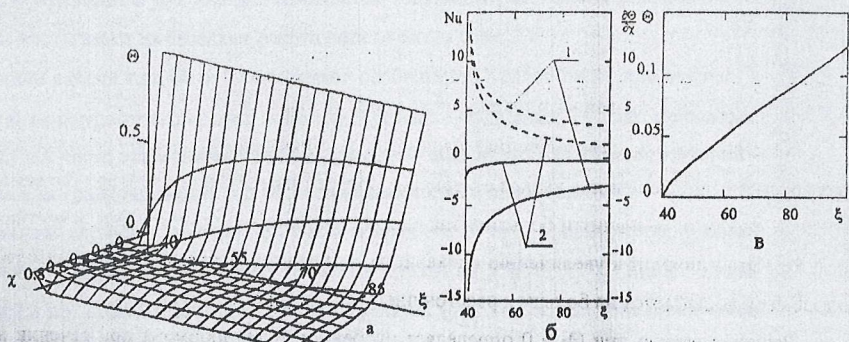


Рис. 8. Распределение безразмерных величин при течении с параметрами:  $\xi_0 = 40$ ,  $Re = 7 \cdot 10^4$ ,  $\Theta_2 = -0,1$ ,  $\alpha = 15^\circ$ . а – распределение температуры; б – распределение чисел Нуссельта  $Nu$  – штриховые линии и производных  $\partial\Theta/\partial\chi$  на границах – сплошные линии. 1 – на границе  $\chi = 0$ , 2 –  $\chi = 1$ ; в – среднемассовой температуры.

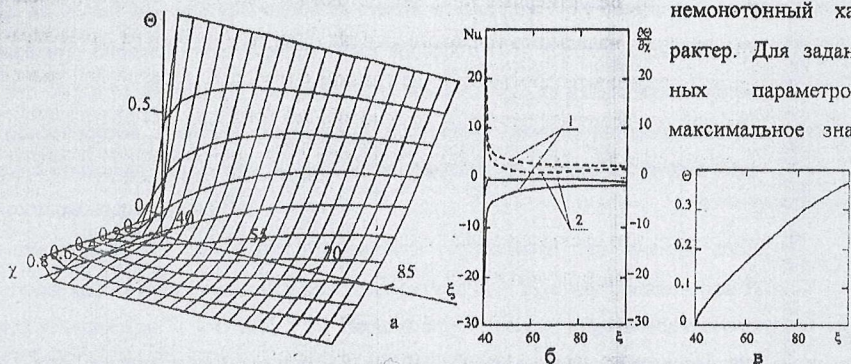


Рис. 9. Распределение безразмерных величин при течении с параметрами:  $\xi_0 = 40$ ,  $Re = 10^4$ ,  $\Theta_2 = -0,1$ ,  $\alpha = 15^\circ$ . а – распределение температуры; б – распределение чисел Нуссельта  $Nu$  – штриховые линии и производных  $\partial\Theta/\partial\chi$  на границах – сплошные линии. 1 – на границе  $\chi = 0$ , 2 –  $\chi = 1$ ; в – среднемассовой температуры.

чение  $\bar{\Theta} \approx 0,5017$ , что практически вряд ли может быть обнаружено, но максимум появляется вследствие различия радиусов кривизны внешней и внутренней границ канала, вследствие чего поток жидкости через сечение канала, ограниченное серединной поверхностью  $\chi = 0,5$  и границей  $\chi = 0$  несколько больше, чем поток между серединной поверхностью и границей  $\chi = 1$ . Это различие наибольшее при малых  $\xi$ , а при увеличении  $\xi$  различие в кривизне поверхностей уменьшается.

Анализ разложений (49) и (50) показывает, что при уменьшении  $Re$  или увеличении  $\xi$  производные на границах стремятся к значению:

сверху, т.е. зависимость  $\bar{\Theta}(\xi)$  имеет немонотонный характер. Для заданных параметров максимальное зна-

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} = \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} \rightarrow \Theta_2 - 1, \quad (52)$$

и тогда из (46) следуют выражения для предельных значений чисел Нуссельта.

Течение при меньших значениях параметра  $\xi_0$  и неизменных остальных параметрах соответствует течению в канале с меньшим поперечным сечением, т.е. при большей средней скорости, а значит и больших значениях локального числа Пекле и, в частности,  $Re_0$ . Это приводит к увеличению начального теплового участка, и стабилизация теплообмена достигается на большем расстоянии от входа (рис. 5).

Решение задачи при  $\Theta_2 > 0$  определяет особенности теплообмена при течении в канале с температурами его границ либо одновременно большими  $T_0$ , либо меньшими. Первый случай часто встречается при экструзионно-выдувном формовании, а второй – при погружном гранулировании без обогрева формирующего оборудования.

В данном варианте течения тепловой пограничный слой формируется у обеих границ канала (рис. 6). Безразмерные тепловые потоки на границах (48) имеют одинаковые знаки в пределах начального теплового участка (рис. 6а, 7а). Если на длине канала наступает стабилизация теплообмена, то на границе с меньшей безразмерной температурой тепловой поток меняет направление (рис. 6б, 7а). Это происходит вследствие того, что безразмерная температура жидкости вблизи указанной границы становится выше безразмерной температура стенки.

Заметим также, что среднemasовая температура потока на некотором расстоянии  $\xi'$  от входа достигает температуры одной из стенок канала (рис. 7б). Вследствие этого число Нуссельта, определенное традиционным способом (46), терпит разрыв на этой границе (рис. 7а), в то же время в распределении температуры не наблюдается экстремальных особенностей. Поэтому для каналов, поперечное сечение которых является многосвязной областью, безразмерные потоки на границах, по-видимому, лучше определять с помощью выражений (48).

Решение при  $\Theta_2 < 0$  определяет особенности теплообмена при течении, когда внешняя стенка канала поддерживается при температуре  $T_1 > T_0$ , а внутренняя – при  $T_2 < T_0$  или для течения при  $T_1 < T_0$  и  $T_2 > T_0$ . Первый случай может встретиться при эксплуатации устройств погружного гранулирования без обогрева дорна и фильерной доски, но с обогревом корпуса устройства. Второй случай встречается при экструзионно-выдувном формовании при подаче в формирующую головку воздуха с температурой более высокой, чем температура расплава полимера.

При больших значениях числа  $Re$  течение происходит на начальном тепловом

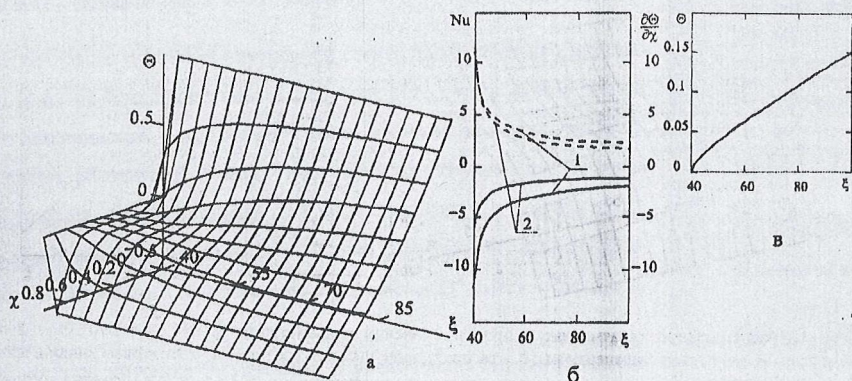


Рис. 10. Распределение безразмерных величин при течения с параметрами:  $\xi_0 = 40$ ,  $Re = 2 \cdot 10^4$ ,  $\Theta_2 = -0,5$ ,  $\alpha = 15^\circ$ . а – распределение температуры; б – распределение чисел Нуссельта  $Nu$  – штриховые линии и производных  $\partial\Theta/\partial\chi$  на границах – сплошные линии. 1- на границе  $\chi = 0$ , 2 –  $\chi = 1$ ; в – среднемассовой температуры.

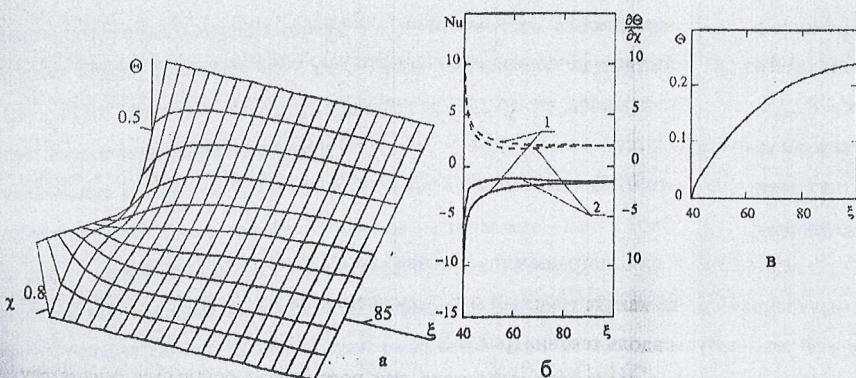
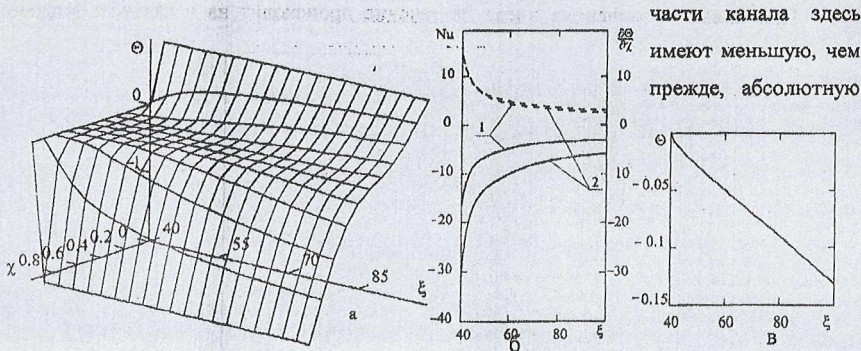


Рис. 11. Распределение безразмерных величин при течения с параметрами:  $\xi_0 = 40$ ,  $Re = 2 \cdot 10^4$ ,  $\Theta_2 = -0,5$ ,  $\alpha = 90^\circ$ . а – распределение температуры; б – распределение чисел Нуссельта  $Nu$  – штриховые линии и производных  $\partial\Theta/\partial\chi$  на границах – сплошные линии. 1- на границе  $\chi = 0$ , 2 –  $\chi = 1$ ; в – среднемассовой температуры.

участке (рис. 8). Для малых абсолютных значений  $\Theta_2$  тепловой поток на внутренней стенке меньше, чем на внешней по абсолютной величине. Безразмерная среднемассовая температура увеличивается вдоль течения вследствие преобладания теплообмена с внешней границей. При этом все зависимости имеют непрерывно монотонный характер изменения.

При числах  $Re \sim 10^4$  тепловой слой распространяется на все поперечное сечение потока в пределах канала (рис. 9). Безразмерные тепловые потоки на границах большей



части канала здесь имеют меньшую, чем прежде, абсолютную

Рис. 12. Распределение безразмерных величин при течении с параметрами:  $\xi_0 = 40$ ,  $Re = 7 \cdot 10^4$ ,  $\Theta_2 = -2$ ,  $\alpha = 15^\circ$ . а – распределение температуры, б – распределение чисел Нуссельта  $Nu$  – штриховые линии и производных  $\partial\theta/\partial\chi$  на границах – сплошные линии. 1 – на границе  $\chi = 0$ , 2 –  $\chi = 1$ ; в – среднемассовой температуры.

величину, а изменение теплового потока на внутренней стенке вдоль течения имеет не-монотонный характер (рис. 9). Это происходит вследствие того, что в начале канала безразмерная температура жидкости у внутренней стенки понижается за счет теплообмена с ней, и, как следствие, абсолютное значение теплового потока уменьшается вдоль течения. Далее вдоль течения, из-за установления поля температуры, безразмерный тепловой поток стремится к своему предельному значению (52), увеличиваясь по абсолютной величине (рис. 9). По этой же причине зависимость  $Nu_2(\xi)$  имеет экстремальный характер.

Увеличение абсолютного значения  $\Theta_2$  приводит к увеличению теплового потока на внутренней стенке канала (рис. 10) и к уменьшению роста среднемассовой безразмерной температуры вдоль течения (рис. 10).

Увеличение угла раскрытия диффузора при постоянных остальных параметрах приводит к увеличению поперечного сечения канала, т.е. к уменьшению средней скорости и локальных чисел Пекле; благодаря чему значительно уменьшается начальный тепловой участок (рис. 11) и тепловые потоки на границах канала, и среднемассовая температура достигает своего предельного значения.

Дальнейшее увеличение абсолютного значения  $\Theta_2$  ведет к увеличению абсолютной величины безразмерного теплового потока на начальном тепловом участке (рис. 12) и к уменьшению безразмерной среднемассовой температуры вдоль течения.

При уменьшении  $Re$ , как и раньше, уменьшаются абсолютные значения тепловых потоков на границах в пределах канала. Тепловой слой распространяется на все сече-

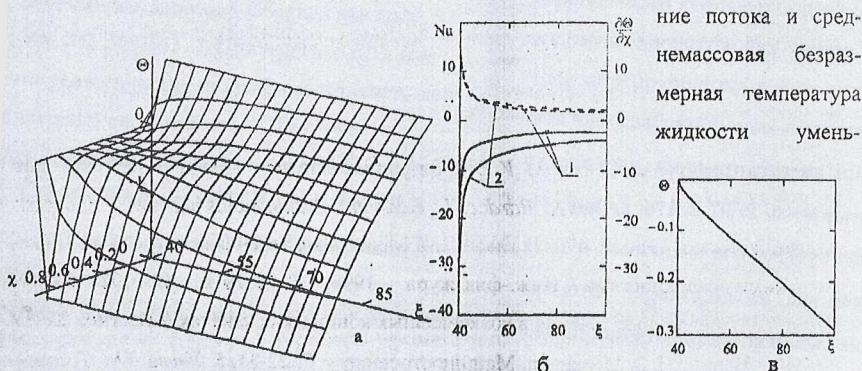


Рис. 13. Распределение безразмерных величин при течении с параметрами:  $\xi_0 = 40$ ,  $Re = 2 \cdot 10^4$ ,  $\Theta_2 = -2$ ,  $\alpha = 15^\circ$ . а - распределение температуры; б - распределение чисел Нуссельта  $Nu$  - штриховые линии и производных  $\partial\Theta/\partial\chi$  на границах - сплошные линии. 1- на границе  $\chi = 0$ . 2 -  $\chi = 1$ ; в - среднемассовой температуры.

шается на более значительную величину, чем прежде (рис. 13).

Точность расчета может быть проверена с помощью закона сохранения энергии:

$$c_p Q (\Delta \bar{T} - T_0) = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} [(q_1 - q_2) R \sin \alpha + h q_2 \cos \alpha] dR, \quad (51)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  - тепловые потоки на границах канала,  $\chi = 0$  и  $\chi = 1$  соответственно. В безразмерном виде (51) запишется:

$$Re \bar{\Theta} = 2 \left\{ \int_{\xi_0}^{\xi} \left[ \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} \right] \sin \alpha - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} \cos \alpha \right\} d\xi. \quad (52)$$

Расчеты показывают, что правая и левая часть (52) совпадают с точностью, с которой выполняются вычисления.

### Обозначения

а - коэффициент температуропроводности,  $m^2/c$ ; с - удельная теплоёмкость, Дж/кг К; h - ширина канала, м; Р,  $P_0$  - давление текущее и на входе, Па; Q - объёмный расход,  $m^3/c$ ; R - координата радиальная, м; T - температура, К; V,  $V_0$  - скорость текущая и на входе в канал, м/с; x, y, z - декартовы координаты, м;  $\alpha$  - половина угла раскрытия конуса, рад;  $\beta$  - постоянная разделения;  $\lambda$  - теплопроводность жидкости, Вт/(м·К);  $\gamma$  - динамический коэффициент вязкости, Па·с;  $\rho$  - плотность,  $kg/m^3$ ; X - поперечная бикони-



ческая координата, м;  $Gn = \frac{\gamma V_0^2}{\lambda \Delta T_{\text{теол}}}$  - число Нема-Гриффита,  $Re_0 = \frac{V_0 h_{cp}}{\lambda}$  - число Пекле

на входе в канал,  $Re = \frac{h V_0 \rho}{\gamma}$  - число Рейнольдса.

**Список литературы:** 1. *Joshi M. V.* Dies for plastics extrusion. - Delhi: Macmillan. India Limited, 1984. P. 176. 2. *Sors L., Bardocz L., Radnoti I.* Plastic molds and dies. - Budapest: Akademiai Kiado, 1980. P. 495. 3. *Ульев Л.М.* Медленные течения между соосными коническими поверхностями // Инж.-физ. журн. - 1998. - Т. 71, №. 6. - С. 1092-1098. 4. *Ульев Л.М.* Медленные течения в коаксиальных конических каналах // Вестник ХГПУ. - 1997. - Вып. 7. Ч. 2. Механика. Машиностроение. - С. 22-31. 5. *Ульев Л.М., Товажнянский Л.Л.* Теплообмен при ламинарном течении между коаксиальными эквидистантными коническими поверхностями. Диффузорное течение // Вестник ХГПУ. - 1998. - Вып. 10. - С. 3-12. 6. *Ульев Л.М.* Теплообмен при медленном диффузорном течении в кольцевых конических каналах переменной ширины // Информационные технологии: Наука, техника, технология, образование, здоровье. Сборник научных трудов ХГПУ. Выпуск 6. Ч. 3. Харьков. 1998. - С. 509-513. 7. *Пономаренко В.Г., Потеня Г.Ф., Ульев Л.М. и др.* // Определение реологических свойств высоковязких жидкостей с помощью автоматического капиллярного вискозиметра. // Инж. -физ. журн. - 1990. - Т. 59, №. 1. -С. 158-159. 8. *Тадмор З., Гогос К.* Теоретические основы переработки полимеров. - М.: Химия - 1984, - С. 632. 9. *Гольдин А.М., Карамзин В.А.* Гидродинамические основы процессов тонкослойного сепарирования. -М.: Агропромиздат, 1985. - С. 264. 10. *Лыков А.В.* Тепломассообмен. -М.: Энергия, 1972. - С. 560.

*Поступила в редколлегию 18.05.99*