



**ВЕСТНИК**

**НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
«ХПИ»**

**9'2002**

**1**

**Харьков**

*Л.М. УЛЬЕВ*, канд. техн. наук

## ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ СВОЙСТВ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ЛАМИНАРНОМ КОНФУЗОРНОМ ТЕЧЕНИИ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

У роботі одержано рішення задачі ламінарної конфузornoї течії рідини в співвісному конічному каналі з частковим урахуванням інерційних властивостей. До розрахунку приймається тільки середня інерційна сила яка виникає внаслідок зміни середньої швидкості при зміні площі попереднього перерізу каналу вздовж течії. Одержано аналітичні вирази для розрахунку перепаду тиску при таких течіях та критеріальні значення чисел Рейнольдса аж до яких можна нехтувати інерційними властивостями при таких розрахунках.

При создании полимерного оборудования часто приходится рассчитывать течения в соосных конических каналах [1, 2], частным случаем которых являются каналы, образованные эквидистантными круглыми коническими поверхностями (рис. 1). Диффузорное течение в таких каналах с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса исследовано автором в работах [3, 4], а в работе [5] получены выражения для расчета давления и скорости при медленных конфузорных течениях. Однако течение в конических каналах имеет существенную особенность, а именно, изменение средней скорости

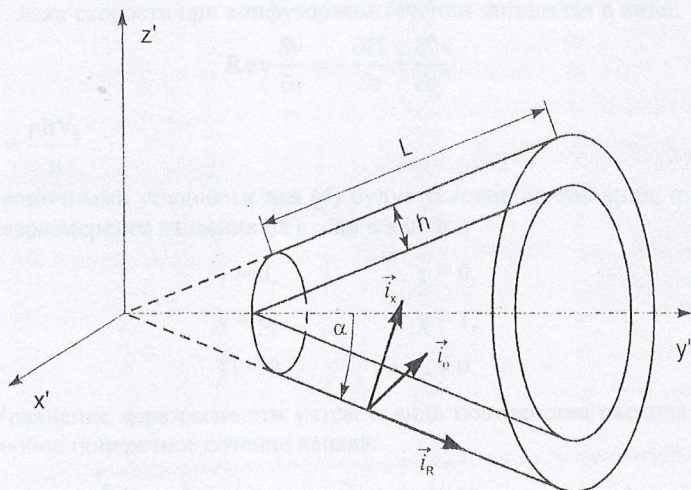


Рис. 1. Геометрия конического зазора постоянной ширины:  $L$  - длина конической части канала,  $h$  - ширина зазора,  $i_R, i_X, i_y$  - орты в биконической системе координат

жидкости вдоль течения вследствие изменения поперечного сечения канала. Поэтому инерционный член в уравнениях движения при таком течении всегда будет отличен от нуля. В данной работе мы определим его влияние на перепад давления в канале при конфузорном течении и выясним пределы применимости ранее полученного решения [5].

Рассматривать течение в соосном коническом канале будем также, как и в работах [3 – 5], в биконических координатах (рис. 1), определяемых преобразованием [6]

$$z = R \cos \alpha + X \sin \alpha \quad (1)$$

$$y' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \sin \varphi = \Omega \sin \varphi, \quad (2)$$

$$x' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \cos \varphi = \Omega \cos \varphi. \quad (3)$$

Для исследования течения в соосном коническом канале введем безразмерные величины:  $\xi = \frac{R}{h}$ ,  $\chi = \frac{X}{h}$ ,  $s = \xi_1 - \xi$ ,

$$V_0 = \frac{Q}{\pi h^2 (2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)}, \quad v = \frac{V}{V_0}, \quad \Pi = \frac{(P - P_0)h}{\mu V_0}. \quad \text{В работе [7] показано, что}$$

в практически важных случаях выполняется условие  $\xi \geq 2.22 \operatorname{ctg} \alpha$ , что позволяет пренебречь влиянием кривизны границ канала на течение, а оценки, выполненные в [3 – 5], позволяют редуцировать систему гидродинамических уравнений движения жидкости к одному уравнению, которое с учетом знака скорости при конфузорном течении запишется в виде:

$$\operatorname{Re} v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} + \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}, \quad (4)$$

$$\text{где } \operatorname{Re} = \frac{\rho h V_0}{\mu}.$$

Граничными условиями для (4) будут условие прилипания, и равенство нулю безразмерного давления на входе в канал:

$$v = 0, \quad \chi = 0, \quad (5)$$

$$v = 0, \quad \chi = 1, \quad (6)$$

$$\Pi = 0, \quad s = 0. \quad (7)$$

Уравнение неразрывности учтем в виде постоянства расхода жидкости через любое поперечное сечение канала:

$$\int_0^1 [(\xi_1 - s) \sin \alpha - \chi \cos \alpha] v d\chi = \frac{1}{2} (2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha). \quad (8)$$

При ламинарном течении жидкости в каналах с малыми и умеренными числами Рейнольдса длина начального гидродинамического участка, как правило, сравнима с шириной канала или меньше [8], поэтому далее будем учитывать только инерционную силу, возникающую вследствие изменения

площади поперечного сечения канала. В левой части (4) в качестве  $v$  будем рассматривать характерную безразмерную скорость течения жидкости [5]:

$$\bar{v} = \frac{2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha}{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (4), получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s} + 2 \operatorname{Re} \frac{\sin \alpha (2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)^2}{[2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha]^3} = \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}. \quad (10)$$

Решение системы (10), (5) – (8) запишется в виде:

$$v = \frac{6(2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)}{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha} (\chi - \chi^2), \quad (11)$$

$$\Pi = \frac{6(2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)}{\sin \alpha} \ln \frac{2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha}{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\operatorname{Re}}{2} \left\{ 1 - \left[ \frac{2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha}{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha} \right]^2 \right\}, \quad (12)$$

а безразмерный градиент давления выразится соотношением:

$$\frac{d\Pi}{ds} = -12\bar{v} - 2 \operatorname{Re} \frac{\bar{v}^2 \sin \alpha}{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha}. \quad (13)$$

Заметим, что если в (12) и (13) положить  $\operatorname{Re}_0 = 0$ , то мы получим распределение безразмерного давления и его градиента для медленного конфузорного течения в соосных конических каналах [5]:

$$\Pi^* = \frac{6(2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)}{\sin \alpha} \ln \frac{2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha}{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha}, \quad (14)$$

$$\frac{d\Pi^*}{ds} = -12\bar{v}, \quad (15)$$

а если в (12) и (13) положить  $\alpha = 90^\circ$ , то получим выражения, описывающие распределение безразмерного давления и его градиента при ламинарном радиальном течении в плоском канале:

$$\Pi = 12\xi_1 \ln \frac{\xi_1}{\xi_1 - s} + \frac{\operatorname{Re}}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\xi_1}{\xi_1 - s} \right)^2 \right], \quad (16)$$

$$\frac{d\Pi}{ds} = -12\bar{v} + \operatorname{Re} \frac{\bar{v}^2}{\xi_1 - s}. \quad (17)$$

Определяющими параметрами задачи являются значения чисел  $\operatorname{Re}$ , угла раскрытия диффузоров  $\alpha$  и координат входа в канал  $\xi_1$  и выхода из него  $\xi_0$ . Проанализируем влияние данных параметров на распределение давления в канале. Но сначала выясним интервал чисел Рейнольдса, в котором справедливо выражение (14). Будем считать, что инерционными силами,

вызванными геометрией канала, можно пренебречь, если относительное отклонение между (12) и (14) не превышает 5%.

При стремлении  $s \rightarrow 0$  (или  $\xi \rightarrow \xi_1$ ) предел этого относительного отклонения будет равен

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Pi - \Pi^*}{\Pi^*} = - \frac{\operatorname{Re} \operatorname{tg} \alpha}{6(1 - 2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (18)$$

При стремлении  $s \rightarrow \xi_1 - \xi_0$  (или  $\xi \rightarrow \xi_0$ ), предел этого относительного отклонения будет равен:

$$\varepsilon_{s \rightarrow \xi_1 - \xi_0} = \frac{\operatorname{Re} \operatorname{tg} \alpha}{12(1 - 2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha)} \frac{1 - \left( \frac{1 - 2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha}{1 - 2\xi_0 \operatorname{tg} \alpha} \right)^2}{\ln \frac{1 - 2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha}{1 - 2\xi_0 \operatorname{tg} \alpha}}. \quad (19)$$

Полагая  $\varepsilon \leq 0.05$ , мы из (18) и (19) получим две оценки числа Рейнольдса, вплоть до которого можно пренебрегать инерционными силами, вызванными изменением площади поперечного сечения канала:

$$\operatorname{Re}_{m1} = \left| \frac{0.3(1 - 2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} \right|, \quad (20)$$

$$\operatorname{Re}_{m2} = \left| \frac{0.6(1 - 2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha) \lg \frac{1 - 2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha}{1 - 2\xi_0 \operatorname{tg} \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha \left[ 1 - \left( \frac{1 - 2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha}{1 - 2\xi_0 \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 \right]} \right|. \quad (21)$$

Используя то, что величина  $2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha \gg 1$ , мы из выражений (20) и (21) легко получим соотношение  $\operatorname{Re}_{m2} < \operatorname{Re}_{m1}$ , т.е. лимитирующим значением числа  $\operatorname{Re}$ , до которого можно пренебрегать инерционными силами, будет величина (21), из которого легко можно получить более простое выражение для оценки лимитирующего значения  $\operatorname{Re}$ :

$$\operatorname{Re}_m = \left| \frac{\xi_1 \ln \frac{\xi_1}{\xi_0}}{1 - \left( \frac{\xi_1}{\xi_0} \right)^2} \right|, \quad (22)$$

которое не зависит от  $\alpha$ . Действительно,  $\operatorname{Re}_{m2}$  наиболее существенным образом зависит от  $\xi_0$ , а зависимость от  $\alpha$  и  $\xi_1$  менее выражена (рис. 2).

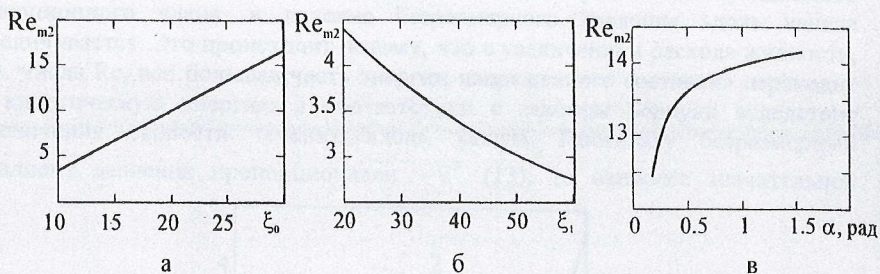


Рис. 2. Зависимость числа Рейнольдса, ограничивающего применение модели течения с пренебрежением инерционными силами от: а – координаты выхода из канала для значений  $\alpha = 15^\circ$  и  $\xi_1 = 40$ ; б – координаты входа в канал при  $\alpha = 15^\circ$  и  $\xi_0 = 10$ ; в – пол-угла раскрытия конфузоров при  $\xi_0 = 26$  и  $\xi_1 = 56$

Заметим, что (22) практически совпадает с (21) при  $\alpha = 90^\circ$ , т.е. плоского радиального течения.

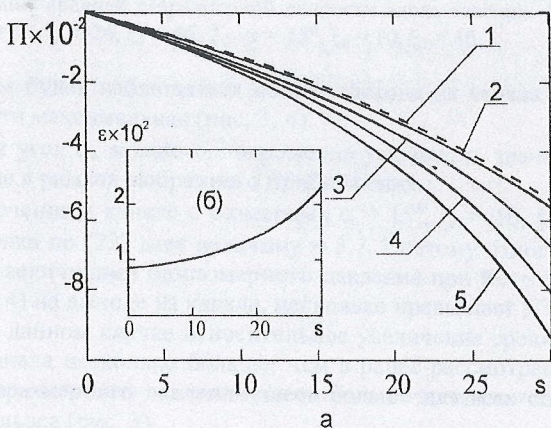


Рис. 3. Распределение безразмерного давления вдоль течения в канале с размерами:  $\alpha = 5^\circ$ ,  $\xi_0 = 26$ ,  $\xi_1 = 56$  – а; 1 –  $Re = 0$ , 2 –  $Re = 5$ , 3 –  $Re = 50$ , 4 –  $Re = 100$ , 5 –  $Re = 150$ ; б – распределение вдоль течения относительного отклонения между значениями безразмерного давления, вычисленными по (14) и (12) при  $Re = 5$

Рассмотрим течение для параметров  $\alpha = 5^\circ$ ,  $\xi_0 = 26$ ,  $\xi_1 = 56$  и числа Рейнольдса равных 5, 50, 100 и 150. В этом случае величина числа  $Re_{m2} \approx 10.6$ , а оценка по (22) дает значение 11.8.

Распределение безразмерного давления  $\Pi$  при  $Re = 5$  отличается от распределения  $\Pi^*$  не более, чем на 3 % (рис. 3), причем максимальное отклонение достигается на выходе из канала.

Увеличение числа  $Re$  приводит к более существенному влиянию инерционного члена, и падение безразмерного давления вдоль канала увеличивается. Это происходит потому, что с увеличением расхода жидкости, т.е. числа  $Re$ , все большая часть энергии напряженного состояния переходит в кинетическую энергию в соответствии с законом Бернули вследствие увеличения скорости течения вдоль канала. Поскольку безразмерный градиент давления пропорционален  $-\bar{v}^2$  (13), то наиболее значительное

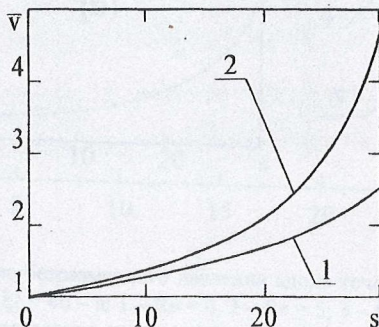


Рис. 4. Изменение средней безразмерной скорости вдоль течения: 1 – в канале с размерами:  $\alpha = 5^\circ$ ,  $\xi_0 = 26$ ,  $\xi_1 = 56$ ; 2 –  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\xi_0 = 10$ ,  $\xi_1 = 40$

падение давления будет наблюдаться вблизи выхода из канала, где средняя скорость жидкости максимальная (рис. 3, 4).

Увеличивая угол  $\alpha$ , можно одновременно уменьшать значение  $\xi_0$  и исследовать течение в рамках выбранного приближения.

В случае течения в канале с размерами  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\xi_0 = 10$ ,  $\xi_1 = 40$  число  $Re_{m2} \approx 3.4$ , а оценка по (22) дает величину  $\approx 3.7$ . Поэтому относительное отклонение между величинами безразмерного давления при  $Re = 5$ , рассчитанными по (12) и (14) на выходе из канала, несколько превышает 5 % (рис. 5).

Поскольку в данном случае относительное увеличение средней скорости течения вдоль канала несколько больше, чем в ранее рассмотренном случае, то и падение безразмерного давления здесь больше для всех соответствующих чисел Рейнольдса (рис. 3).

**Обозначения:**  $h$  – ширина канала, м;  $P$ ,  $P_0$  – давление текущее и на входе, Па;  $Q$  – объёмный расход, м<sup>3</sup>/с;  $R$ ,  $R_0$ ,  $R_1$  – координата радиальная и выхода из канала и входа в него, м;  $V$  – скорость, м/с;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – декартовы координаты, м;  $\alpha$  – половина угла внешней конической поверхности, рад;  $\rho$  – удель-

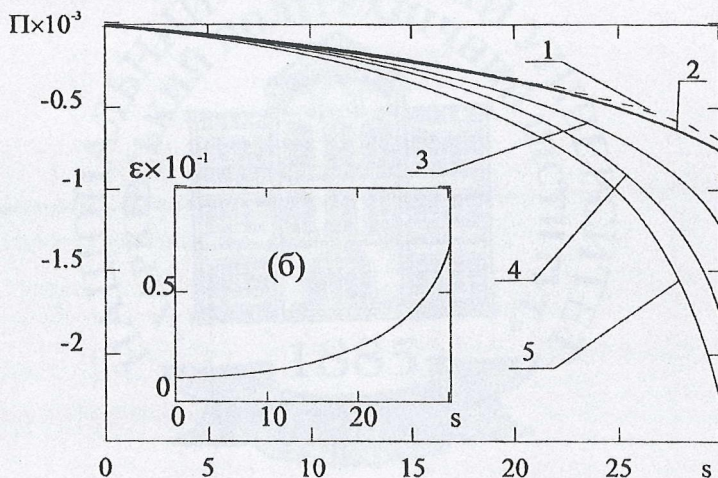


Рис. 5. Распределение безразмерного давления вдоль течения в канале с размерами:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\xi_0 = 10$ ,  $\xi_1 = 40 - a$ ; 1 –  $Re = 0$ , 2 –  $Re = 5$ , 3 –  $Re = 50$ , 4 –  $Re = 100$ , 5 –  $Re = 150$ ; б – распределение вдоль течения относительного отклонения значений безразмерного давления, вычисленными по (14) и (12) при  $Re = 5$

ная плотность жидкости,  $\text{кг/м}^3$ ;  $\mu$  – вязкость,  $\text{Па}\cdot\text{с}$ ;  $X$  – поперечная биконическая координата, м;  $Re = \frac{\rho h V_0}{\mu}$  – число Рейнольдса.

Список литературы: 1. *Joshi M. V.* Dies for plastics extrusion. Delhi: Macmillan. India Limited, 1984. 176 p. 2. *Sors L., Bardocz L., Radnoti I.* Plastic molds and dies. Budapest: Akademiai Kiado, 1980. 495 p. 3. *Ульев Л.М.* Медленные течения между соосными коническими поверхностями // ИФЖ. 1998. Т. 71, № 6. С. 1092–1098. 4. *Ульев Л.М.* Медленные течения в коаксиальных конических каналах // Вестник ХГПУ. Механика. Машиностроение. Харьков, ХГПУ. 1997. Вып. 7. Ч. 2. С. 22–31. 5. *Ульев Л.М.* Теплообмен при медленном течении в коаксиальных конических конфузорах для граничных условий первого рода // ГТЭ. 1999. № 2. С. 40 – 52. 6. *Гольдин А.М., Карамзин В.А.* Гидродинамические основы процессов тонкослойного сепарирования. М.: Агропромиздат, 1985. С. 264. 7. *Ульев Л.М.* Влияние кривизны границ на установившееся ламинарное течение в кольцевом коническом канале постоянной ширины // Интеграції технології та енергозбереження. 2001, № 1. С. 34 – 44. 8. *Тарг С.М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М.: Госиздат. тех.– теор. лит. 1951. С. 420.

Поступила в редколлегию 09.04.02