

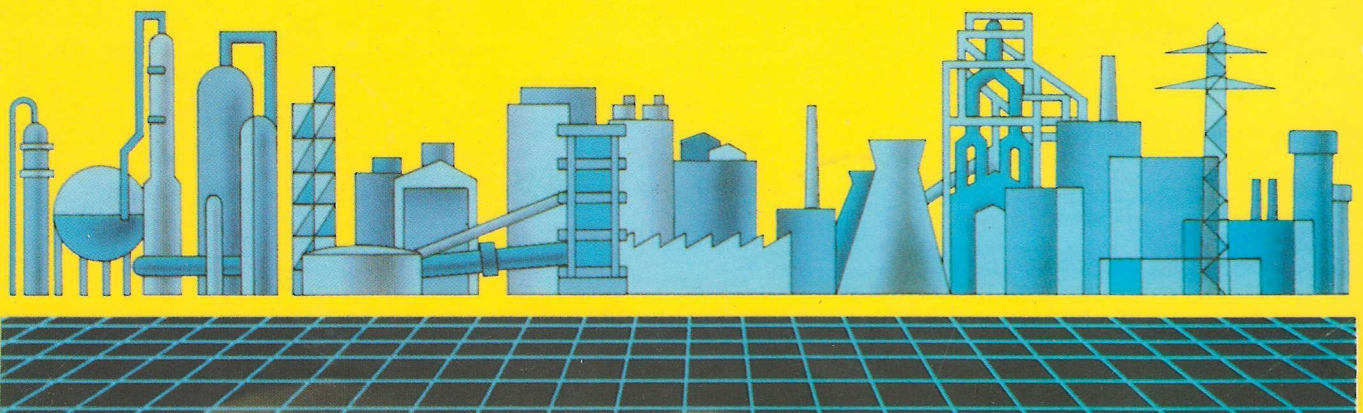
ISBN 5-7763-2106-9
ISBN 5-7763-2107-7

ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ

ЩОКВАРТАЛЬНИЙ НАУКОВО-ПРАКТИЧНИЙ ЖУРНАЛ



4 ' 2003



**ДЛИНА НАЧАЛЬНОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО УЧАСТКА
ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДИФFUЗОРНОМ ТЕЧЕНИИ В СООСНЫХ
КОНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ**

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Введение

Определение длины начального гидродинамического участка для каналов различной конфигурации является фундаментальной задачей гидродинамики ламинарных течений, поскольку данное значение будет определяющим для выбора метода решения ряда технических и научных задач. Например, в тех случаях, когда длина начального гидродинамического участка мала по сравнению с длиной канала, влиянием начального распределения скорости можно пренебречь и решать задачи для определения распределений давления и температуры в канале для развитого профиля скорости [1–9].

В связи с возросшим значением ламинарных течений в технике за счет расширения переработки и производства полимеров, большой интерес приобретают приближенные методы оценки длины начального гидродинамического участка в каналах полимерного оборудования. В работе [10] автором решена гидродинамическая задача в начальном гидродинамическом участке при диффузорном ламинарном течении в соосных конических каналах. Полученные выражения достаточно сложны и их применение на практике, например, при выполнении конструкторских расчетов не удобно. Поэтому в данной работе мы получим математические выражения для приближенного расчета начального гидродинамического участка для ламинарного диффузорного течения ньютоновской несжимаемой жидкости в соосных конических каналах постоянной вдоль течения ширины. Для этого мы воспользуемся результатами работы [10], где представлено распределение скорости диффузорного ламинарного течения в секториальном канале постоянной ширины, с помощью которого аппроксимируется течение в соосном коническом канале (рис. 1).

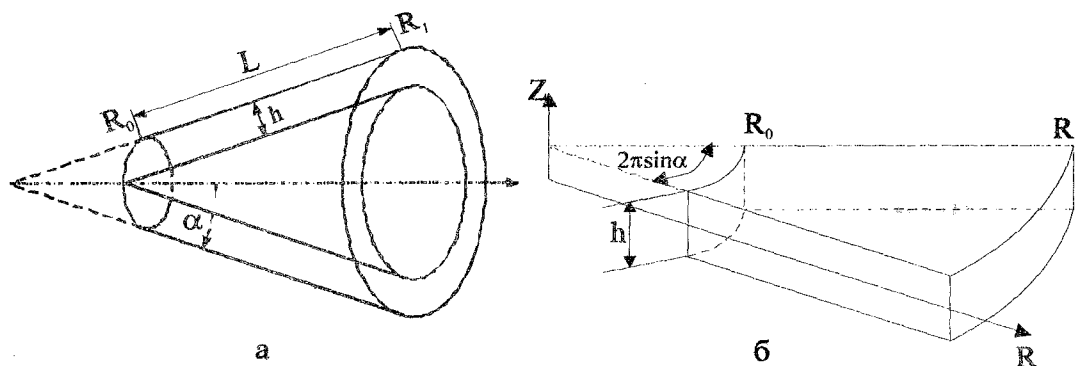


Рисунок 1 – Геометрия соосного конического канала:

а – соосный конический канал; б – разворот соосного конического канала на плоскость; L – длина образующей границ канала; R_0 , R_1 – радиальные координаты входа и выхода из канала, h – ширина канала; α – полуугол раскрытия конических поверхностей; Z – аксиальная цилиндрическая координата

Получается секториальный канал разворотом конического соосного канала на плоскость, как показано на рис. 1 [10].

Определение приближенных выражений для расчета длины начального гидродинамического участка

Оценка членов в уравнениях гидродинамики позволила редуцировать систему уравнений движения к одному уравнению, записанному в форме Озеена, для которого условиями однозначности явились: постоянство расхода в любом поперечном сечении канала, заданное на входе давление и условия прилипания. В результате решения сформулированной задачи в цилиндрических координатах мы получили распределение скорости в канале, которое в безразмерных переменных и параметрах

$$\xi = \frac{r}{r_0}, \chi = \frac{2z}{h}, v = \frac{V_r}{V_0}, R = \frac{\rho V_0 h^2}{4\mu r_0} \quad (1)$$

имеет вид:

$$v = \frac{3}{2}(1 - \chi^2) \frac{1}{\xi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k^2} \left(1 - \frac{\cos v_k \chi}{\cos v_k} \right) \left[\int_0^{\xi^2 - 1} \frac{e^{-\frac{v_k^2 \tau}{2R}}}{\sqrt{(\xi^2 - \tau)^3}} d\tau - 2e^{-\frac{v_k^2(\xi^2 - 1)}{2R}} \right], \quad (2)$$

где $V_0 = \frac{Q}{2\pi r_0 h \sin \alpha}$ – средняя скорость течения на входе в канал.

Далее в [10] показано, что при диффузорном течении в секториальном канале существует автомодельное распределение скорости:

$$v = \frac{3}{2}(1 - \chi^2) \frac{1}{\xi}, \quad (3)$$

к которому стремится распределение скорости при увеличении координаты ξ , поэтому течение с распределением скорости (3) можно рассматривать как распределение скорости при стабилизированном течении.

Если мы примем, согласно предположению Прандтля, что длина начального гидродинамического участка равна расстоянию от входа в канал, на котором относительное отклонение радиальной скорости развивающегося течения от радиальной скорости установившегося течения, взятых на срединных поверхностях соосного конического канала, уменьшается до 1 % [11], т.е. принимая во внимание (2) и (3), получим:

$$\frac{\xi v(0, \xi)}{1.5} - 1 = 0.01. \quad (4)$$

Чтобы получить выражение для определения длины начального гидродинамического участка, сначала упростим выражение, описывающее распределение безразмерной радиальной скорости на срединной поверхности канала:

$$v(0, \xi) = \frac{3}{2\xi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k^2} \left(1 - \frac{1}{\cos v_k} \right) \left[\int_0^{\xi^2-1} \frac{e^{-\frac{v_k^2 \tau}{2R}}}{\sqrt{(\xi^2 - \tau)^3}} d\tau - 2e^{-\frac{v_k^2(\xi^2-1)}{2R}} \right]. \quad (5)$$

В сумме (5) будем удерживать только первый член, т.е. член, определяющийся первым собственным значением $v_1 = 4.4934$ [10], т.к. все остальные члены быстро убывают с ростом v_k .

Поскольку в подынтегральном выражении всегда $\xi^2 > \tau$, мы можем разложить знаменатель в ряд Тейлора, при этом получим:

$$(\xi^2 - \tau)^{-\frac{3}{2}} = \xi^3 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\tau}{\xi^2} + o\left(\frac{\tau}{\xi^2}\right) \right] \approx \xi^3 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\tau}{\xi^2} \right). \quad (6)$$

После этого (5) можно записать как:

$$v(0, \xi) = \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{v_1^2} \left(1 - \frac{1}{\cos v_1} \right) \left[\int_0^{\xi^2-1} \frac{e^{-\frac{v_1^2 \tau}{2R}}}{\xi^3 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\tau}{\xi^2} \right)} d\tau - 2e^{-\frac{v_1^2(\xi^2-1)}{2R}} \right]. \quad (7)$$

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части (7). Для этого сделаем замену переменной интегрирования $y = 1 - b\tau$, где $b = \frac{3}{2\xi^2}$ и, обозначая далее $a = \frac{v_1^2}{2R}$, можем записать:

$$I(\xi) = \int_0^{\xi^2-1} \frac{e^{-a\tau}}{1 - \frac{3}{2} \frac{\tau}{\xi^2}} d\tau = -\frac{e^{-\frac{a}{b}}}{b} \int_1^{\frac{a}{b}y} \frac{e^{-\frac{a}{b}y}}{y} dy = -\frac{e^{-\frac{a}{b} \frac{a}{b} + a(1-\xi^2)}}{b} \int_{\frac{a}{b}}^{\frac{a}{b}} \frac{e^z}{z} dz = \quad (8)$$

$$= -\frac{e^{-\frac{a}{b}}}{b} \left\{ Ei \left[\frac{a}{b} + a(1-\xi^2) \right] - Ei \left(\frac{a}{b} \right) \right\},$$

где
$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt, \quad (9)$$

это интегральная показательная функция [12].

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$I(\xi) = -\frac{2}{3} \xi^2 e^{-\frac{v_1^2 \xi^2}{3R}} \left\{ Ei \left[\frac{v_1^2}{6R} (3 - \xi^2) \right] - Ei \left(\frac{v_1^2 \xi^2}{3R} \right) \right\}. \quad (10)$$

Далее мы можем воспользоваться представлением показательной интегральной функции в виде ряда [12], который достаточно точно приближает функцию $Ei(x)$ при $x > 1$. Мы используем для приближения только первый член этого ряда, т.е.

$$Ei(x) \approx \frac{e^x}{x}. \tag{11}$$

Сравним сначала для положительных x значения, полученные для $Ei(x)$ с помощью приближения (11) и вычисленные по определению функции (9), в котором интеграл будем вычислять в смысле главного значения Коши:

$$Ei(x) = \lim_{\substack{\beta \rightarrow -\infty \\ \alpha \rightarrow 0}} \left(\int_{\beta}^{-\alpha} \frac{e^t}{t} dt + \int_{\alpha}^x \frac{e^t}{t} dt \right). \tag{12}$$

Результаты сравнения, приведенные на рис. 2, показывают, что для приближенной оценки величины функции $Ei(x)$ выражение (11) можно использовать в интервале $1.5 < x < \infty$. Теперь мы можем определить максимальное значение R , для которого можно использовать представление (11) для второго члена (9). Исходя из того, что должно удовлетворяться условие (рис. 2)

$$\frac{\sqrt[2]{\xi^2}}{3R} > 1.5, \tag{13}$$

и учитывая результаты предыдущего анализа, говорящие, что при больших значениях R значения $\xi_{н.г.} = 0$ (10), и то, что $\xi_{н.г.}$ всегда больше 1, получим, что

$$R < 460. \tag{14}$$

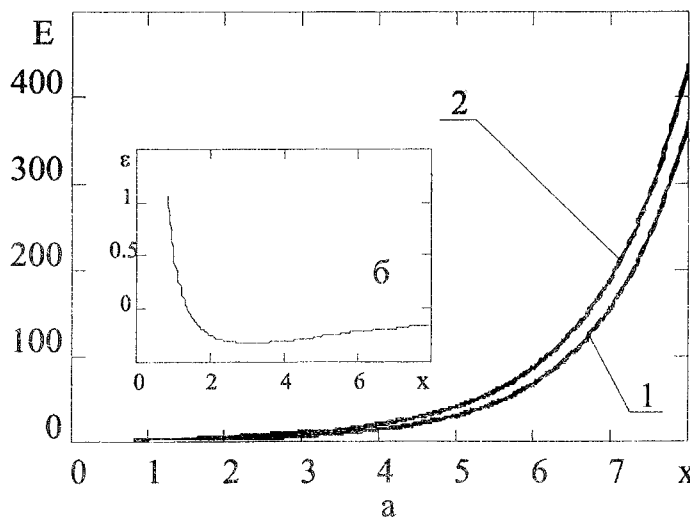


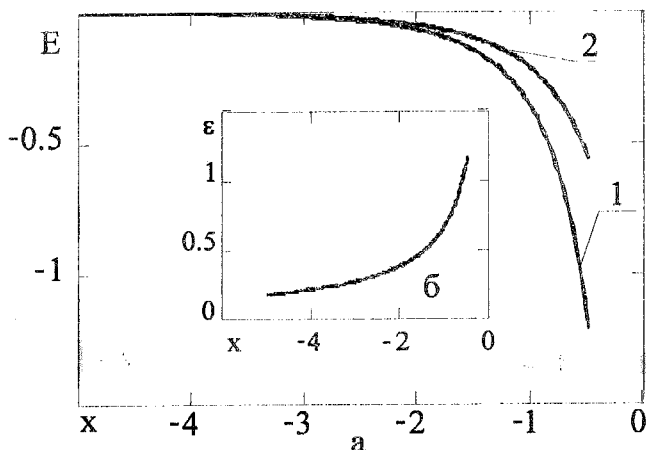
Рисунок 2: (а) 1 – аппроксимация показательной интегральной функции для положительных значений аргумента с помощью выражения (11); 2 – показательная интегральная функция. (б) – относительное отклонение распределения 1 от распределения – 2

В первом члене (10) при малых значениях R аргумент $Ei(x)$ положителен и его величина больше 1, поэтому приближение (11) выполнимо.

Для больших значений R аргумент первого члена будет отрицательным. Сравнивая величины (9) и (11) для отрицательных значений аргумента (рис. 3), мы видим, что (11) можно использовать для приближения (9) при $x < 0$ в интервале $-\infty < x < -2$, т.е. при больших R должно выполняться условие

$$\frac{v_1^2}{6R}(\xi^2 - 3) > 2. \tag{15}$$

(11)



(11)

Рисунок 3 – Аппроксимация показательной интегральной функции -2 с помощью выражения (11) – 1 (а) для отрицательных значений аргумента; б – относительное отклонение распределения 1 от распределения 2

Отсюда получаем ограничение на величину R при приближении первого члена (9) соотношением (11):

$$R < 170, \tag{16}$$

и, учитывая (14), мы видим, что ограничение (16) является общим при аппроксимации (9) с помощью (11).

Здесь необходимо заметить, что число R в практически интересных случаях течения, как правило, $R < 100$, т.е. для всех практически интересных случаев приближение (11) приемлемо как для первого, так для второго члена в выражении (10).

Выполняя аппроксимацию в (10) и подставляя $I(\xi)$ в (7), получим:

$$v(0, \xi) = \frac{3}{2\xi} + \frac{\cos v_1 - 1}{v_1^2 \cos v_1} \times \left\{ \frac{2R}{v_1^2 \xi^3} - \frac{4R + 2v_1^2 \xi (3 - \xi^2)}{v_1^2 \xi (3 - \xi^2)} \exp \left[-\frac{v_1^2}{2R} (\xi^2 - 1) \right] \right\}. \tag{17}$$

Заметим, что при больших значениях R мы можем пренебречь третьим членом по сравнению с двумя первыми, поскольку аргумент экспоненты будет меньше (-1) , и записать (17) в виде:

$$v(0, \xi) = \frac{3}{2\xi} + \frac{2R(\cos v_1 - 1)}{\xi^3 v_1^4 \cos v_1}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (4), получим выражение, определяющее безразмерную радиальную координату, на которой достигается 1 % отклонение скорости на срединной поверхности в развивающемся канале от скорости на срединной поверхности при установившемся течении для больших значений числа R :

$$\xi_{\text{н.г.}} = \frac{20}{v_1} \sqrt{\frac{\cos v_1 - 1}{3 \cos v_1}} \sqrt{R}. \quad (19)$$

Вычисляя коэффициент в (19), получим:

$$\xi_{\text{н.г.}} = 1.354 \sqrt{R}. \quad (20)$$

Безразмерная длина начального гидродинамического участка при стационарном ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины будет, очевидно, равна:

$$\Delta \xi_{\text{н.г.}} = 1.354 \sqrt{R} - 1. \quad (21)$$

Многочисленные вычисления показывают, что определение величины начального гидродинамического участка с помощью простых выражений (20) и (21) хорошо согласуется с точным анализом с помощью распределения (2) уже при значениях $R > 0.95$. Например, в ранее рассмотренных случаях течения для $R = 1.25$ мы получили значение $\xi_{\text{н.г.}} = 1.5$, используя (20), получим $\xi_{\text{н.г.}} = 1.354 \cdot \sqrt{1.5} = 1.514$, что практически совпадает с ранее полученным. Для $R = 5$, ранее было $\xi_{\text{н.г.}} = 3.025$, а (20) дает результат $\xi_{\text{н.г.}} = 1.354 \cdot \sqrt{5} = 3.028$ и различие этими величинами составляет менее 0,1 %. Для $R = 50$ мы ранее имели $\xi_{\text{н.г.}} = 9.5$, а (20) дает $\xi_{\text{н.г.}} = 9.574$, т.е. отклонение между этими величинами равно 0,7 %.

Итак, мы получили приближенное выражение для определения безразмерной длины начального гидродинамического участка при $R > 0.95$. Давайте получим приближенное выражение для расчета $\xi_{\text{н.г.}}$ и при $R \leq 0.95$.

Сначала упростим выражение (21) с помощью условий $R \ll \mu_1^2$ и $\xi = O(1)$. Последнее условие очевидно, поскольку $\xi_{\text{н.г.}}$ всегда больше 1 и в рассматриваемом случае меньше 1.5. Это позволяет записать приближенное выражение для (21):

$$v(0, \xi) = \frac{3}{2\xi} - \frac{\cos v_1 - 1}{v_1^2 \cos v_1} \exp \left[-\frac{v_1^2}{2R} (\xi^2 - 1) \right]. \quad (22)$$

Запишем для (22) условие (4), учитывая, что при малых величинах R скорость на срединной поверхности канала стремится к своему стабилизированному значению

снизу, т.е. разность между (76) и стабилизированным значением скорости будет отрицательна, и то, что $\xi = 0$ (1):

$$\frac{2 \cos v_1 - 1}{3 v_1^2 \cos v_1} \exp \left[-\frac{v_1^2}{2R} (\xi^2 - 1) \right] = 0.01. \quad (23)$$

Из (23) определяем выражение для вычисления безразмерной координаты $\xi_{н.г.}$, начиная от которой течение можно рассматривать, как полностью развитое:

$$\xi_{н.г.} = \sqrt{1 - \frac{2R}{v_1^2} \ln \frac{3v_1^2 \cos v_1}{200(\cos v_1 - 1)}}. \quad (24)$$

Поскольку $R < 1$, а коэффициент при R равен $\frac{2}{\mu_1^2} \ln \frac{3\mu_1^2 \cos \mu_1}{200(\cos \mu_1 - 1)} = -0.289$, т.е.

второй член под знаком радикала по абсолютной величине меньше 1, мы можем воспользоваться для представления биномиальным разложением для нецелых степеней [13, 14], после чего получим:

$$\xi_{н.г.} = 1 - \frac{R}{v_1^2} \ln \frac{3v_1^2 \cos v_1}{200(\cos v_1 - 1)} + o \left[\frac{R}{v_1^2} \ln \frac{3v_1^2 \cos v_1}{200(\cos v_1 - 1)} \right]. \quad (25)$$

Удерживая первые два члена (25) и вычисляя коэффициент при R , окончательно имеем для вычисления $\xi_{н.г.}$ выражение:

$$\xi_{н.г.} = 1 + 0.1445R. \quad (26)$$

Отклонение величины координаты $\xi_{н.г.}$, до которой распространяется длина начального гидродинамического участка, полученной с помощью расчета по (26) от величины $\xi_{н.г.}$, полученной с помощью детальных вычислений по (2), при изменении параметра R в пределах $0 < R \leq 0.95$, не превышает 1%. Заметим, что при $R \geq 1$ скорость жидкости на срединной поверхности, достигнув своего установившегося значения, затем вниз по потоку превышает значение скорости стабилизированного течения вследствие влияния инерционных свойств. Это превышение невелико, например, для $R = 5$, максимальное отклонение близко к 2.5 % и для любых возможных значений R , как мы это уже видели, не превосходит 10 %. Но для определения величины начального гидродинамического участка важно не просто достижение жидкостью на срединной поверхности скорости развитого течения, важна стабилизация профиля скорости по всему поперечному сечению канала, поэтому для определения $\xi_{н.г.}$ при больших значениях R необходимо пользоваться выражением (20).

Безразмерная длина начального гидродинамического участка для малых значений R , будет равна

$$\Delta \xi_{н.г.} = 0.1445R. \quad (27)$$

Итак, для определения величин $\xi_{н.г.}$ и $\Delta \xi_{н.г.}$ мы получили следующие соотношения:

$$\xi_{н.г.} = 1 + 0.1445R, \Delta\xi_{н.г.} = 0.1445R, 0 < R \leq 0.95, \quad (28)$$

$$\xi_{н.г.} = 1.354\sqrt{R}, \Delta\xi_{н.г.} = 1.354\sqrt{R} - 1, 0.95 < R < 170. \quad (29)$$

Очевидно, что для перехода к размерным величинам в (28), (29) эти выражения необходимо умножить на γ_0 .

Принимая во внимание (1) и (2), получаем для R определение

$$R = \frac{\rho h Q}{8\pi\mu r_0^2 \sin \alpha}, \quad (30)$$

которое позволяет анализировать длину начального гидродинамического участка при диффузорном ламинарном течении в соосных конических каналах в зависимости от размерных параметров задачи.

Таким образом, в работе получены математические выражения для приближенных вычислений длины начального гидродинамического участка при ламинарном диффузорном течении в соосных конических и в плоских секториальных каналах постоянной ширины, удобные при выполнении технических расчетов.

Обозначения

h – ширина соосного конического канала, м; Q – объемный расход жидкости, м³/с; r – радиальная координата в цилиндрической системе координат, м; R_0, R_1 – значения радиальных координат входа в канал и выхода из него, м; S – площадь поверхности поперечного сечения соосного конического канала, м²; V_r – радиальная составляющая размерной скорости в цилиндрической системе координат, м/с; V_0 – средняя по поперечному сечению размерная скорость на входе в канал, м/с; z – аксиальная координата в цилиндрической системе координат, м; α – половина угла раскрытия конических поверхностей, образующих границы канала, рад; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости, Па·с; ρ – плотность жидкости, кг/м³; $\xi_{н.г.}$ – безразмерная радиальная координата, ограничивающая длину начального гидродинамического участка; $\Delta\xi_{н.г.}$ – безразмерная длина начального гидродинамического участка; $R = \frac{\rho V_0 h^2}{4\mu r_0}$ – безразмерный параметр, определяющий решение задачи.

Литература

1. Ульев Л.М. Течение и теплообмен высоковязкой жидкости в круглом конфузоре // ТОХТ. – 1992. – Т. 26. – №. 2. – С. 243–253.
2. Ульев Л.М. Неизотермическое течение расплавов термопластичных полимеров в коническо-цилиндрических фильерах // ТОХТ. – 1996. – Т. 30. – №. 6. – С. 583–590.
3. Ульев Л.М. Неизотермическое течение расплавов термопластичных полимеров в круглых формирующих каналах // ТОХТ. – 1995. – Т. 29. – №. 3. – С. 233–241.
4. Ульев Л.М. Ульев Л.М. Теплообмен при медленном диффузорном течении жидкости в коаксиальных конических каналах // ТОХТ. – 2000. – Т. 34. – №. 1. – С. 16–24.

5. Ульев Л.М. Ламинарный теплообмен при **диффузорном течении** в коаксиальном коническом канале с переменной температурой **внутренней** стенки // ТОХТ. – 2001. – Т. 35. – № 1. – С. 31–41.

6. Ульев Л.М. Напорно-расходная характеристика **третичных** формирующих каналов при неизотермическом течении расплавов термопластичных **полимеров** // ИФЖ. – 1996. – Т. 69. – №. 4. – С. 606–614.

7. Ульев Л.М. Медленные течения между **соосными** **цилиндрическими** поверхностями // ИФЖ. – 1998. – Т. 71. – № 6. – С. 1092–1098.

8. Ульев Л.М. Ламинарный теплообмен при **диффузорном течении** в соосном коническом канале в случае граничных условий первого **рода** // ИФЖ. – 2001. – Т. 74. – № 1. – С. 21–26.

9. Ульев Л.М. Ламинарный теплообмен при **диффузорном** течении в соосных конических зазорах для граничных условий первого **рода** // ИФЖ. – 1999. – № 4. – С. 45–59.

10. Ульев Л.М. Развитие ламинарного **диффузорного течения** в соосных конических каналах постоянной ширины // ИФЖ. – 2003. – № 2 – С. 45–59.

11. Тарг С.М. Основные задачи теории **ламинарных течений**. – М.-Л.: Гос. изд. тех.-теор. лит, 1951. – С. 420.

12. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные **функции**. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1969. – С. 344.

13. Арфкен Г. Математические методы в **физике**. – М.: Атомиздат, 1974. – С. 712.

14. Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г. **Математические формулы**. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит, 1985. – С. 128.

УДК 532.5; 678.027

Ульев Л.М.

**ДОВЖИНА ПОЧАТКОВОЇ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ ДІЛЯНЦІ
ПРИ ЛАМІНАРНІЙ ДИФУЗОРНІЙ ТЕЧІЇ У СПІВВІСНОМУ
КОНІЧНОМУ КАНАЛІ ПОСТІЙНОЇ ШИРИНИ**

У роботі наведені математичні вирази до наближених обчислень початкової гідродинамічної ділянки при ламінарній дифузорній течії у співвісному конічному каналі та у секторіальному каналі сталої ширини, які є зручними до технічних розрахунків.