ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

НОЯБРЬ–ДЕКАБРЬ, ТОМ 71, № 6

МИНСК 1998

ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

1998 г. НОЯБРЬ-ДЕКАБРЬ ТОМ 71, № 6

УДК 532.58; 678.027

Л. М. Ульев

МЕДЛЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ МЕЖДУ СООСНЫМИ КОНИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Решены задачи медленного течения ньютоновской жидкости в каналах, образованных соосными конусами, которые могут иметь или не иметь общую вершину. Получены удобные зависимости для расчета перепада давления и скорости.

В последние годы существенно увеличилось техническое значение течений высоковязких жидкостей, в частности, при переработке и производстве пластмасс и изделий из них. Течение в аппаратах переработки полимеров происходит в каналах различной формы. В большинстве конструкций экструзионных прессформ, фильерных, кабельных и трубных головок [1, 2] существует участок, где течение происходит между коническими поверхностями (рис. 1).

Для выбора оптимальных технологических и конструктивных параметров процессов экструзии необходимо создать надежные, научно обоснованные методы расчета параметров течения в каналах экструзионных головок, напорно-расходной характеристикой которых определяется рабочая точка экструдера [1].

В пределах изменения параметров переработки расплавы некоторых полимеров ведут себя как ньютоновские жидкости [3]. Для практически значимых расходов таких жидкостей $Q \approx 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^3/с, их реофизических свойств $\mu \sim 10^3$ Па·с, $\rho \sim 1250$ кг/м^3, $\lambda \sim 0{,}2$ Вт/(м·К), $\Delta T_{\text{rheol}} \sim 6$ К [4] и геометрических размеров канала (рис. 1) число Нема–Гриффита [4, 5] Gn << 1, число Рейнольдса Re << 1.

Величина числа Gn говорит о том, что диссипативные эффекты не влияют на динамику течения и ими можно пренебречь, что вместе с хорошим термостатированием экструдеров [2] позволяет рассматривать течение в кольцевых конических каналах как изотермическое.

Ламинарное течение между соосными конусами с общей вершиной рассматривалось в [6] в сферических координатах. Получено аналитическое решение для общего случая с учетом инерционных членов в уравнениях движения, но в виде, затрудняющем его использование для практических расчетов. В работе [7] получено общее решение для сферических течений безотносительно к граничным условиям, а в [8] методом конечных элементов исследуется течение нелинейно-вязкой жидкости между конусами при постоянной ширине зазора между ними. Авторы работы [8] по заданному перепаду давления определяют поле скорости и расход, однако в инженерной практике, как правило, требуется решение обратной задачи. А в работах [2, 9] для расчета конических течений предложено использовать ступенчатую аппроксимацию цилиндрическими каналами, что может привести к значительным ошибкам.

Сделанные выше оценки позволяют получить простые выражения для расчета течений между круглыми коническими поверхностями в широком диапазоне изменения геометрических параметров, учитывающие форму канала.

Сначала рассмотрим течение между соосными конусами с общей вершиной. Малое число Рейнольдса позволяет упростить уравнения движения и, следуя [4], записать их с учетом аксиальной симметричности течения в виде:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V_R}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial V_R}{\partial\theta}\right) - \frac{2V_R}{R^2}\,, \tag{1}$$

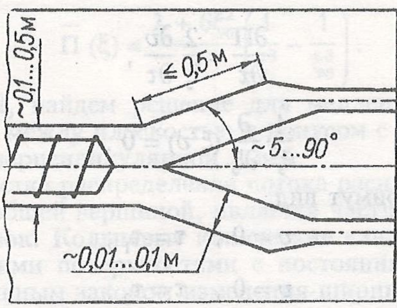

Рис. 1. Поперечный разрез типичной фильерной головки

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial \theta}=\frac{2}{R}\frac{\partial V_R}{\partial \theta}\,, \tag{2}$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 V_R\right)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta V_\theta\right)=0 \tag{3}$$

с граничными условиями для соосных конусов с общей вершиной (рис. 2)

$$V_R=0\,,\quad V_\theta=0\,,\quad \theta=\theta_1\,, \tag{4}$$

$$V_R=0\,,\quad \theta=\theta_2\,, \tag{5}$$

$$P=P_0\,,\quad R=R_1\,, \quad R_0 \tag{6}$$

$P_0=\frac{1}{\cos\theta_1-\cos\theta_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} P(R_0,\theta)\sin\theta\,d\theta$

где

$$P(R)=\frac{1}{\cos\theta_1-\cos\theta_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} P(R,\theta)\sin\theta d\theta\,.$$

Для углов раскрытия конусов $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1\le 30^\circ$ уравнение неразрывности (3) позволяет сделать оценку угловой составляющей скорости $V_\theta \sim \Delta\theta V_R$, т. е. $V_\theta=o(V_R)$, и пренебречь ею в уравнениях движения и неразрывности, которые в безразмерных переменных

$$\xi=\frac{R}{r_0},\quad v=\frac{V_R}{V_0},\quad \Pi=\frac{(P-P_0)\,r_0}{\mu V_0},\quad \tau=\cos\theta,\quad V_0=\frac{Q}{2\pi R_0^2\,(\tau_1-\tau_2)}\,, \tag{7}$$

запишутся:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}=\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[(1-\tau^2)\frac{\partial v}{\partial\tau}\right]-\frac{2v}{\xi^2}\,, \tag{8}$$

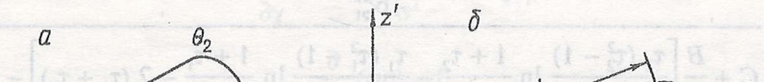

Рис. 2. Геометрия конического зазора: *а* – конусы с общей вершиной (R, R_0, R_1 – радиальная координата и координаты входа и выхода, м; θ_1, θ_2 – углы раскрытия конусов, град); *б* – конусы, не имеющие общей вершины (L – длина конической части канала, м; h – ширина зазора, м; $\mathbf{i}_R$, $\mathbf{i}_X$, $\mathbf{i}_\varphi$ – орты в биконической системе координат)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = \frac{2}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \tau} , \tag{9}$$

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 v) = 0 . \tag{10}$$

Граничные условия примут вид:

$$v = 0 , \quad \tau = \tau_1 ; \tag{11}$$

$$v = 0 , \quad \tau = \tau_2 ; \tag{12}$$

$$\Pi = 0 , \quad \xi = \xi_0 , \tag{13}$$

а

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Pi d\tau .$$

Условие постоянства расхода запишем как

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} v d\tau = - \xi_1^2 (\tau_1 - \tau_2) / \xi^2 . \tag{14}$$

Из (10) следует зависимость $v = u(\tau)/\xi^2$, которая совместно с (9) дает

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = - \frac{6}{\xi^4} u + f' (\xi) , \tag{15}$$

подставляя (15) в (7) и разделяя переменные, получаем уравнения для определения $u(\tau)$ и $f(\xi)$:

$$(1 - \tau^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\tau \frac{\partial u}{\partial \tau} + 6u = - \lambda , \tag{16}$$

$$\xi^4 f' (\xi) = - \lambda . \tag{17}$$

Решение (16) с учетом условий (11)–(14) имеет вид

$$u = \frac{\lambda}{6} (A P_2 (\tau) + B Q_2 (\tau) - 1) , \tag{18}$$

где

$$A = \frac{Q_2 (\tau_2) - Q_2 (\tau_1)}{P_2 (\tau_1) \, Q_2 (\tau_2) - P_2 (\tau_2) \, Q_2 (\tau_1)} ; \quad B = \frac{P_2 (\tau_2) - P_2 (\tau_1)}{P_2 (\tau_1) \, Q_2 (\tau_2) - P_2 (\tau_2) \, Q_2 (\tau_1)} ;$$

$$\lambda = \frac{6 \xi_1^2}{C + \dfrac{B}{4} \left[\dfrac{\tau_2 (\tau_2^2 - 1)}{\tau_1 - \tau_2} \ln \dfrac{1 + \tau_2}{1 - \tau_2} - \dfrac{\tau_1 (\tau_1^2 - 1)}{\tau_2 - \tau_1} \ln \dfrac{1 + \tau_1}{1 - \tau_1} - 2 (\tau_2 + \tau_1) \right] - 1} ;$$

$$C = \frac{A}{2} (\tau_2^2 + \tau_2 \tau_1 + \tau_1^2 - 1) ,$$

а $P_2(\tau) = 0{,}5(3\tau^2 - 1)$, $Q_2(\tau) = \frac{1}{2} P_2(\tau) \ln \frac{1 + \tau}{1 - \tau} - \frac{3}{2} \tau$ – многочлены Лежандра первого и второго рода и второго порядка.

Используя (12), (14), (16) и (17), запишем выражение для распределения давления

$$\Pi (\xi, \tau) = \frac{2u (\tau)}{\xi^3} + \frac{\lambda}{3} \left(\frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi_0^3} \right) - \frac{2}{\xi_0} , \tag{19}$$

и, усредняя его по поперечному сечению канала, получаем

$$\overline{\Pi}(\xi) = \frac{\lambda + 6\xi_0^2}{3}\left(\frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi_0^3}\right). \tag{20}$$

Полагая $\theta_2 = \pi/2$, найдем решение для медленного осесимметричного радиального течения между плоскостью и конусом с вершиной, лежащей на плоскости, и осью, перпендикулярной к ней.

Конструкция участка распределения потока расплава, образованного соосными конусами с общей вершиной, является частным случаем устройства экструзионных головок. Кольцевые конические каналы могут быть образованы концентрическими поверхностями с постоянным расстоянием между ними или с произвольным законом изменения ширины зазора. Поэтому для выбора оптимальных конструктивных и технологических параметров необходимо исследовать течение между соосными конусами, не имеющими общей вершины.

Рассмотрим конусный кольцевой канал постоянной ширины (рис. 1). Параметры жидкости и основные геометрические размеры устройств формования аналогичны приведенным выше. Поэтому течение жидкости можно считать изотермическим, а в уравнениях движения пренебрегать инерционными членами. Исследовать уравнения гидродинамики в таком канале удобно в биконических координатах [10], начало которых совпадает с вершиной внешней конической поверхности (рис. 1), определяемых преобразованиями:

$$z' = R\cos\alpha + X\sin\alpha\ , \tag{21}$$

$$y' = (R\sin\alpha - X\cos\alpha)\sin\varphi = \Omega\sin\varphi\ , \tag{22}$$

$$x' = (R\sin\alpha - X\cos\alpha)\cos\varphi = \Omega\cos\varphi\ . \tag{23}$$

Вычисляя коэффициенты Ламэ $H_X = 1$, $H_R = 1$, $H_\varphi = \Omega$ и следуя [11], запишем уравнения неразрывности и движения в выбранных координатах. Уравнение неразрывности для аксиально-симметричного течения

$$\frac{\partial}{\partial R}(\Omega V_R) + \frac{\partial}{\partial X}(\Omega V_X) = 0\ . \tag{24}$$

Отсюда получим оценку соотношения между величинами V_X и V_R, $V_X \approx 2V_R h/L$, т. е. $V_X = o(V_R)$, что позволяет систему уравнений гидродинамики в безразмерных переменных

$$\xi = R/r_0\ , \quad \chi = X/r_0\ , \quad V_0 = Q/(\pi r_0^2)\ , \quad v = V_R/V_0\ , \quad \Pi = (P - P_0)\, r_0/\mu V_0 \tag{25}$$

записать как:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sigma\frac{\partial v}{\partial\chi}\right), \tag{26}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\chi} = \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{\sigma^2}v, \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\sigma v) = 0\ , \tag{28}$$

где $\sigma = \xi\sin\alpha - \chi\cos\alpha$.

В практически интересных случаях всегда выполняется условие $\xi\,\mathrm{tg}\,\alpha >> \chi$, т. е. мы можем положить $\sigma \approx \xi\sin\alpha$. Проведя оценку производных в системе уравнений, получим $\partial\Pi/\partial\xi \approx v/\chi_0^2$, $\partial\Pi/\partial\chi \approx$ $\approx v/\xi^2\,\mathrm{tg}\,\alpha$, т. е. можно положить, что $\partial\Pi/\partial\cancel{\xi}\chi = 0$, и редуцировать систему уравнений (26), (27) к следующему:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} = \frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2}. \tag{29}$$

Граничными условиями являются условие прилипания и заданное давление на входе в канал:

$$u = 0\ , \quad \chi = 0\ ; \tag{30}$$

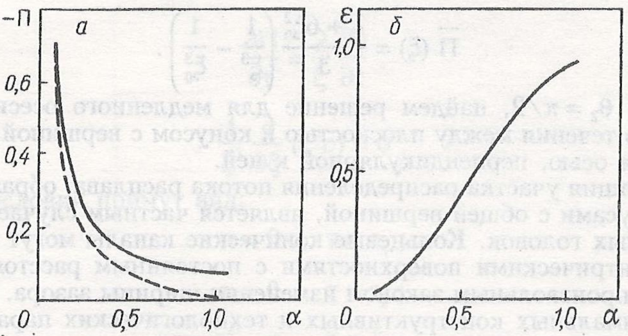

Рис. 3. Зависимости для конического кольцевого канала с постоянной шириной зазора от угла раскрытия: *а* – безразмерного перепада давления в канале (сплошная линия – расчет по (35), штриховая – по (40) и (41а) при $N = 60$); *б* – относительной ошибки для указанных величин

$$u = 0\ ,\quad \chi = \chi_0\quad (\chi_0 = h/r_0)\ ; \tag{31}$$

$$\Pi = 0\ ,\quad \xi = \xi_0\ , \tag{32}$$

а уравнение неразрывности учтем с помощью условия постоянства расхода

$$\int\limits_0^{\chi_0} (\xi \sin\alpha - \chi\cos\alpha)\, v d\chi = 0{,}5\,. \tag{33}$$

Решением системы (29)–(32) являются выражения:

$$v = \frac{6\,(\chi^2 - \chi_0\chi)}{\chi_0^3\,(\chi_0\cos\alpha - 2\xi\sin\alpha)}\ , \tag{34}$$

$$\Pi = -\frac{6}{\chi_0^3 \sin\alpha} \ln\frac{\chi_0 - 2\xi\ \mathrm{tg}\,\alpha}{\chi_0 - 2\xi_0\ \mathrm{tg}\,\alpha}\,. \tag{35}$$

Отметим два предельных случая, вытекающих из (35):

1) при $\alpha \to 90^\circ$ получаем выражение для определения перепада давления при радиальном течении между параллельными плоскостями

$$\Pi = -\frac{6}{\chi_0^3} \ln\frac{\xi}{\xi_0}\ ; \tag{36}$$

2) при $\chi_0/\xi_0 << 1$ – выражение для перепада давления в узких конических щелях [12]

$$\Pi = -\frac{6}{\chi_0^3 \sin\alpha} \ln\frac{\xi}{\xi_0}\ , \tag{37}$$

которое может привести к значительным погрешностям в тех случаях, когда величина χ_0 сравнима с радиусом кривизны канала.

При расчете перепада давления в коаксиальных конических каналах, ширина зазора которых не постоянна вдоль течения, например, образующая внутренней поверхности определяется как $\chi_0 = f(\xi)$, возможно применение ступенчатой аппроксимации:

$$\Pi = -\frac{6}{\sin\alpha} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\chi_{0i}^3} \ln\frac{\chi_{0i} - 2\xi_{i+1}\ \mathrm{tg}\,\alpha}{\chi_{0i} - 2\xi_i\ \mathrm{tg}\,\alpha}\ , \tag{38}$$

где $\xi_{i+1} = \xi_0 + \dfrac{\xi_N}{N}(i-1)$, $\chi_{0i} = f(\xi_i)$; N – число ступеней; ξ_0 – координата входа; ξ_N – координата выхода. Если функция $f(\xi)$ неизвестна, следует использовать ее аппроксимационное представление.

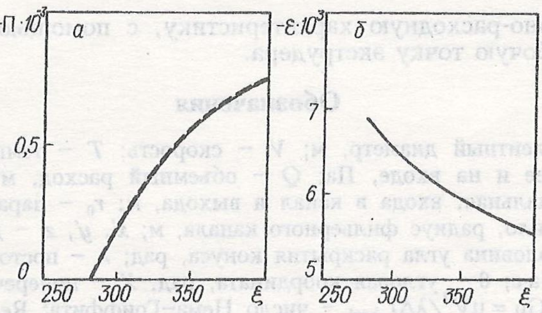

Рис. 4. Зависимости для конического кольцевого канала, образованного конусами с общей вершиной, от безразмерного радиуса: *а* – безразмерного перепада давления в канале (сплошная линия – расчет по (20), штриховая – по (38) при $N = 60$); *б* – относительной ошибки для указанных величин

Аналогично записывается выражение для расчета давления в осесимметричном кольцевом канале переменного сечения с произвольной формой образующей канала:

$$\Pi = -6 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\chi_{0i}^3 \sin\alpha_i} \ln \frac{\chi_{0i} - 2\xi_{i+1} \operatorname{tg}\alpha_i}{\chi_{0i} - 2\xi_i \operatorname{tg}\alpha_i}, \tag{39}$$

где все индексированные величины определяются для каждого участка канала.

Заметим, что данная аппроксимация учитывает геометрические особенности канала и не заменяет сходящееся или расходящееся коническое течение прямолинейным течением.

Кроме того, если в (38) положить $\alpha = 90°$, совместно с (34) получим приближенные выражения для расчета медленного радиального течения между плоскостью и конусом с произвольно расположенной вершиной.

В работах [2, 9] перепад давления в коническом кольцевом канале предлагается рассчитывать с помощью ступенчатой аппроксимации канала коаксиальными цилиндрами. Применив такой подход к каналу постоянной ширины, имеем, следуя [2], зависимость

$$\Delta\Pi = -\frac{24(\xi_1 - \xi_0)\cos^5\alpha}{\chi_0^3 [(\xi_1 + \xi_0)\sin 2\alpha - 2\chi_0]} \tag{40}$$

или, следуя [9], выражение

$$\Delta\Pi = -12 \frac{\xi_1 - \xi_0}{N\chi_0} (\cos\alpha)^4 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2\xi_i \sin\alpha - \chi_0 \operatorname{tg}\alpha}, \tag{40a}$$

которые при $N > 20$ дают практически одинаковый результат.

Сравнение результатов расчета перепада давления в коническом кольцевом канале с постоянной шириной зазора при значениях $\chi_0 = 3{,}33$, $\xi_0 = 280$, $\xi_1 = 400$, по (35) и (40), (40а) показывает их значительное различие, особенно при углах раскрытия $\alpha > 30°$ (рис. 3). Применение ступенчатой аппроксимации к течению между конусами с общей вершиной дает еще большее расхождение с результатами, полученными с помощью (20).

Результаты, полученные по (38), в этом случае показывают хорошую сходимость с зависимостью (20), которая в переменных (25) запишется как

$$\overline{\Pi} = \frac{\lambda + 6\xi_0^2}{6\xi_0^2(\tau_1 - \tau_2)} \left(\frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi_0^3} \right) \tag{41}$$

для значений $\theta_1 = 10{,}91°$, $\theta_2 = 15°$, $\xi_0 = 280$, $\xi_1 = 400$ (рис. 4), а также во всем диапазоне изменения параметров.

Представленные здесь результаты совместно с работами, выполненными автором ранее [4, 5, 13, 14], позволяют выбрать оптимальные технологические и конструктивные параметры экструзионных головок, а также получить их напорно-расходную характеристику, с помощью которой можно определить рабочую точку экструдера.

Обозначения

d – эквивалентный диаметр, м; V – скорость; T – температура; P, P_0 – давление текущее и на входе, Па; Q – объемный расход, м^3/с; R, R_0, R_1 – координата радиальная, входа в канал и выхода, м; r_0 – параметр обезразмеривания, как правило, радиус фильерного канала, м; x', y', z' – декартовы координаты, м; α – половина угла раскрытия конуса, рад; λ – постоянная разделения; μ – вязкость, Па·с; θ – угловая координата, рад; X – поперечная биконическая координата, м; $\mathrm{Gn} = \mu V^2/\lambda \Delta T_{\mathrm{rheol}}$ – число Нема–Гриффита; $\mathrm{Re} = dV\rho/\mu$ – число Рейнольдса.

Литература

1. **Тадмор З., Гогос К.** Теоретические основы переработки полимеров. М., 1984.
2. **Торнер Р. В., Акутин М. С.** Оборудование заводов по переработке пластмасс. М., 1986.
3. **Пономаренко В. Г., Потебня Г. Ф., Ульев Л. М.** и др.//ИФЖ. 1990. Т. 59, № 1. С. 158–159. Деп. в ВИНИТИ 19.02.90, рег. № 982-В90.
4. **Ульев Л. М.**//ТОХТ. 1992. Т. 26, № 2. С. 243–253.
5. **Ульев Л. М.**//ТОХТ. 1996. Т. 30, № 6. С. 583–590.
6. **Слезкин Н. А.** Движение вязкой жидкости в конусе и между двумя конусами//Мат. сб. М. 1935. Т. 42, № 1 С. 43–64.
7. **Хаппель Дж., Бренер Г.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., 1976.
8. **Литвинов В. Г., Иванова Н. И.**//Прикл. механика. 1994. Т. 30, № 11. С. 85–90.
9. **Торнер Р. В.** Теоретические основы переработки полимеров. М., 1977.
10. **Гольдин А. М., Карамзин В. А.** Гидродинамические основы процессов тонкослойного сепарирования. М., 1985.
11. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидродинамика. Ч. 2. М.; Л., 1948.
12. **Новиков П. А., Люблин Л. Я., Новикова В. И.** Течения и тепломассообмен в щелевых системах. Минск, 1991
13. **Ульев Л. М.**//ТОХТ. 1995. Т. 29, № 3. С. 233–241.
14. **Ульев Л. М.**//ИФЖ. 1996. Т. 69, № 4. С. 606–614.

Харьковский государственный политехнический университет

Поступила 04.03.97.