



# ВЕСТНИК

НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

«ХПИ»

11'2003

2

Харьков

Л.М. УЛЬЕВ, канд. техн. наук

## ЛАМИНАРНОЕ ДИФFUЗОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СЕКТОРИАЛЬНОМ КАНАЛЕ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ С ЧАСТИЧНЫМ УЧЕТОМ ИНЕРЦИОННЫХ СВОЙСТВ

У роботі одержано рішення стаціонарної задачі ламінарної дифузornoї течії рідини в секторальному каналі постійної ширини з частковим урахуванням інерційних властивостей. Одержано аналітичні вирази для розрахунку перепаду тиску при таких течіях та критеріальні значення чисел Рейнольдсу.

The problem of steady state laminar diffuser flow between equidistant surfaces having sector ring form and with partial account of the inertial properties was solved. Only inertial forces appearing due to alteration of mean velocity with change of the channel cross-section area were taken into account. The expression for calculation of the pressure drop is received and the main features of flow are analyzed.

При создании полимерного оборудования часто приходится рассчитывать течения в соосных конических каналах, частным случаем которых являются каналы, образованные эквидистантными круглыми коническими поверхностями. Течение в таких каналах с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса исследовано автором в работах [1, 2]. Однако течение в конических каналах имеет существенную особенность, а именно, изменение средней скорости жидкости вдоль течения вследствие изменения поперечного сечения канала. Поэтому инерционный член в уравнениях движения при таком течении всегда будет отличен от нуля.

В работах [3, 4] автором рассмотрено ламинарное течение в соосных конических каналах постоянной ширины с частичным учетом инерционных сил. Решение уравнений движения жидкости выполнено в биконических координатах. Но в практических приложениях бывают случаи, когда различием в кривизне и самой кривизной граничных поверхностей можно пренебречь, и,

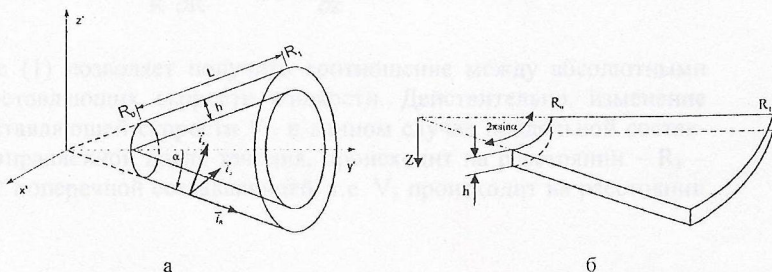


Рис. 1. Геометрия конического зазора постоянной ширины: а – Связь Декартовых и биконических координат с геометрией канала:  $L$  – длина конической части канала, м;  $h$  – ширина зазора, м;  $i_R, i_x, i_y$  – орты в биконической системе координат; б – разворот конического зазора на плоскость

благодаря этому, мы можем рассматривать течение в кольцевом коническом канале, как течение в расширяющемся плоском канале постоянной ширины (рис. 1).

В дальнейшем анализируя течения в таких каналах мы будем рассматривать плоские секториальные течения, отмечать их особенности и сравнивать эти особенности с особенностями, выявленными при анализе течений в соосных конических каналах с помощью биконических координат. Заметим, что это необходимо сделать еще и потому, что радиальные течения в секториальных каналах могут представлять самостоятельный интерес. Предельным случаем такого течения является радиальное течение между параллельными плоскостями.

Если соосный кольцевой канал образован коническими поверхностями с полууглом раскрытия  $\alpha$ , расстоянием между ними  $h$  и ограничен радиальными координатами  $R_0$  и  $R_1$ , отсчитываемыми от вершины внешнего конуса, то плоский канал будет представлять собой часть цилиндрического сектора с углом раскрытия  $\varphi = 2\pi\sin\alpha$ , высотой  $h$  и ограниченного радиусами  $R_0$  и  $R_1$  (рис. 1).

Течение жидкости в таком канале удобно описывать в цилиндрической системе координат, связанной с геометрией канала (рис 1 б). Как и раньше, мы предполагаем, что течение в соосном коническом канале аксиально-симметричное, поэтому при его аппроксимации течением в плоском расширяющемся канале постоянной ширины мы будем рассматривать радиальное и аксиально-симметричное течение во всем диапазоне изменения угловой координаты  $\varphi = [0 \dots 2\pi\sin\alpha]$ . Действительно, мы как бы разрезаем аксиально-симметричное течение в коаксиальном коническом канале вдоль образующей конической поверхности и разворачиваем его на плоскость, поэтому распределение скоростей в плоскостях, ограничивающих канал при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi\sin\alpha$  должны совпадать с распределением скорости в плоскости диаметрального сечения с любым значением угла  $\varphi$ .

Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах запишется как [5]:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R V_R) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

Уравнение (1) позволяет получить соотношение между абсолютными величинами составляющих скорости жидкости. Действительно, изменение радиальной составляющей скорости  $V_r$ , в данном случае продольной составляющей, т.е. направленной вдоль течения, происходит на расстоянии  $\sim R_1 - R_0$ , а изменение поперечной составляющей, т.е.  $V_z$  происходит на расстоянии

$\sim h$ , и тогда уравнение (1) дает соотношению  $V_z \sim \frac{h}{R_1 - R_0} |V_R|$ , а поскольку мы исследуем течение в каналах, для которых выполняется условие  $h \ll R_1 - R_0$ , мы можем считать, что  $V_z = o(V_R)$ .

Малая величина поперечной составляющей скорости по сравнению с продольной составляющей позволяет положить  $V_z = 0$  и рассматривать течение, как плоскопараллельное течение. Для ламинарного течения в плоском канале данное предположение является вполне разумным и ранее использовалось многими авторами при исследовании плоских расходящихся или сходящихся течений [5].

Пренебрежение составляющей скорости  $V_z$  позволяет редуцировать систему уравнений движения жидкости к уравнению, записанному в форме Озеена [5]:

$$\rho \bar{V} \frac{\partial V_R}{\partial R} = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 V_R}{\partial z^2}, \quad (2)$$

где  $\bar{V}$  – средняя по сечению канала скорость, которая определяется используя условие постоянства расхода для поперечного сечения канала на произвольном радиусе  $r$ :

$$2\pi R \sin \alpha \int_0^h V_R dz = Q. \quad (3)$$

как отношение расхода к площади поперечного сечения  $S_r = 2\pi R h \sin \alpha$ :

$$\bar{V} = \frac{Q}{2\pi R h \sin \alpha}.$$

Граничными условиями являются условия прилипания на стенках канала:

$$V_R = 0, h = 0, \quad (5)$$

$$V_R = 0, h = h_0, \quad (6)$$

заданное давление на входе в канал:

$$P = P_0, R = R_0, \quad (7)$$

заданный расход жидкости  $Q$ , и установившийся профиль скорости на входе в канал.

Значение  $P_0$  это относительная величина, поскольку при течении несжимаемых жидкостей характер течения определяется градиентом давления (2), что позволяет нам заменить в уравнении (2) значение абсолютного статического давления, текущим перепадом давления  $\Delta P = P - P_0$ . Следовательно, при решении задачи мы определим как распределение градиента давления вдоль течения, так и распределение перепада давления в зависимости от параметров задачи, что важно для технических приложений, поскольку это позволяет определить расходно-напорную характеристику канала  $\Delta P(Q)$ .

Вводя безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{R}{h_0}, \quad \chi = \frac{z}{h_0}, \quad v = \frac{V_R}{V_{f0}}, \quad \Pi = \frac{(P - P_0) h_0}{\mu V_{f0}}, \quad (8)$$

где  $V_{f0} = \frac{Q}{2\pi R_0 \sin \alpha h_0}$  – средняя скорость жидкости на входе в канал, запишем систему уравнений (4), (6) – (9) в виде:

$$\text{Re}_f \bar{v}_f \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}, \quad (9)$$

где  $\text{Re}_f = \frac{\rho V_{f0} h_0}{\mu}$  – число Рейнольдса,  $\bar{v}_f = \frac{\bar{V}}{V_{f0}}$ .

$$v = 0, \quad \chi = 0, \quad (10)$$

$$v = 0, \quad \chi = 1, \quad (11)$$

$$\Pi = 0, \quad \xi = \xi_0, \quad (12)$$

$$\int_0^1 v d\chi = \frac{\xi_0}{\xi}. \quad (13)$$

Средняя по поперечному сечению безразмерная скорость определяется выражением:

$$\bar{v}_f = \frac{\bar{V}}{V_{f0}} = \frac{\xi_0}{\xi}. \quad (14)$$

Заметим, что если определить безразмерную площадь поперечного сечения плоского канала, как:

$$s_f = \frac{S_f}{S_0} = \frac{2\pi R h \sin \alpha}{2\pi R_0 h \sin \alpha} = \frac{\xi}{\xi_0}, \quad (15)$$

где  $S_0$  — площадь поперечного сечения входа в канал, то можно записать:

$$\bar{v}_f = \frac{1}{s_f}. \quad (16)$$

Поскольку при течениях с малыми и умеренными числами в каналах длина начального гидродинамического участка, как правило, значительно меньше длины канала [6], мы пренебрегаем инерционными силами, связанными с формированием профиля скорости на входе в канал, и, поэтому, мы можем рассматривать в уравнении (9) среднее по поперечному сечению канала значение инерционной силы, действующей на жидкость, т.е. сделать замечание:

$$\text{Re}_f \bar{v}_f \frac{dv}{d\xi} = \text{Re}_f \bar{v}_f \frac{d\bar{v}_f}{d\xi}. \quad (17)$$

Подставляя (14) в (17) и, затем, подставляя результат в (9) получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \frac{\xi_0^2}{\xi^3} \text{Re}_f = \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}. \quad (18)$$

В (18) левая часть не зависит от  $\chi$ , обозначим ее через  $D$  и дважды проинтегрируем полученное уравнение, и далее, используя граничные условия (10) и (11), получим для  $v$ :

$$v = \frac{1}{2} D (\chi^2 - \chi). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (13), получим:

$$D = -12 \frac{\xi_0}{\xi}, \quad (20)$$

т.е. выражения для распределения скорости запишется как:

$$v = 6 \frac{\xi_0}{\xi} (\chi - \chi^2) = 6 \bar{v}_f(\xi) (\chi - \chi^2). \quad (21)$$

Далее, приравнивая  $D(\xi)$  к левой части (18), получим уравнение для определения безразмерного градиента давления:

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = \frac{\xi_0^2}{\xi^3} \text{Re}_f - 12 \frac{\xi_0}{\xi} = \frac{\text{Re}}{\xi_0} \bar{v}_f^3 - 12 \bar{v}_f. \quad (22)$$

Также, как и при конической аппроксимации, градиент давления состоит из двух частей: из инерционной части, которая пропорциональна числу  $\text{Re}$  и средней скорости в третьей степени, и диссипативной части, которая пропорциональна первой степени средней безразмерной скорости.

Интегрируя (22) с условием (12) получим выражение, определяющее распределение безразмерного давления при диффузорном течении в плоском секторе постоянной ширины (рис. 1):

$$\Pi_f = \frac{1}{2} \text{Re}_f \left[ 1 - \left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^2 \right] + 12 \xi_0 \ln \frac{\xi_0}{\xi} = \frac{1}{2} \text{Re}_f (\bar{v}_{0f}^2 - \bar{v}_f^2) + 12 \xi_0 \ln \bar{v}_f, \quad (23)$$

здесь  $\bar{v}_{0f} = 1$  — средняя безразмерная скорость на входе в канал.

Выражение (23) показывает, что параметрами, определяющими решение задачи являются  $\text{Re}_f$  и  $\xi_0$ .

При малых значениях чисел Рейнольдса влияние инерционных свойств незначительно и безразмерный градиент давления незначительно отличается от градиента давления. Увеличение числа  $\text{Re}_f$  приводит к более существенному влиянию инерционного члена на градиент давления.

Дальнейшее увеличение числа  $\text{Re}_f$  инерционная сила становится преобладающей и градиент давления в начале течения становится положительным в начале течения, и течение здесь происходит в направлении возрастания давления.

Значение числа  $\text{Re}_f$ , начиная с которого течение происходит в направлении возрастания давления, можно определить из условия  $\left. \frac{d\Pi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_0} = 0$ , что при-

водит к величине  $\text{Re}_f = 12\xi_0$ , которая совпадает со значением, полученным для радиального течения между плоскими пластинами [4]. При дальнейшем течении инерционная сила уменьшается более интенсивно, чем сила трения, и

на некотором расстоянии от входа градиент давления становится равным 0. Очевидно, что здесь будет наблюдаться максимальное значение безразмерного давления и его локализация определяется из условия  $\frac{d\Pi}{d\xi} = 0$  :

$$\xi_{\Pi \max} = \sqrt{\frac{\text{Re}_f \xi_0}{12}}, \quad (24)$$

что опять совпадает со значением, полученным в [4] для диффузорного течения между плоскими поверхностями.

При дальнейшем течении сила трения уменьшается вследствие уменьшения средней скорости и модуль градиента давления опять уменьшается. В итоге зависимость безразмерного градиента давления от  $\xi$  немонотонна. Минимальное значение безразмерного градиента давления можно определить из

условия  $\frac{d^2\Pi}{d\xi^2} = 0$ , что дает величину:

$$\xi_{\Pi \min} = \frac{1}{2} \sqrt{\text{Re}_f \xi_0}. \quad (25)$$

Возвращаясь к (23) заметим, что перепад давления в канале при стремлении его длины к  $\infty$  также стремиться к бесконечности, т.к. максимальное увеличение давления в рассматриваемом канале бесконечной длины за счет перехода кинетической энергии в потенциальную равно  $\frac{1}{2} \text{Re}_f$ , что не сможет компенсировать стремящийся к  $\infty$  перепад давления, вызванный трением о стенки канала. Данный результат формально совпадает с результатом, полученным в модели с частичным учетом кривизны границ [4].

Давайте, определим значение чисел Рейнольдса  $\text{Re}_f$ , вплоть до которых можно пренебрегать влиянием инерционной силы, возникающей при изменении средней скорости течения вдоль канала.

Как и раньше, в качестве критерия для оценки влияния инерционной силы на ламинарные диффузорные течения примем значение относительного отклонения безразмерного давления, рассчитанного с учетом влияния инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения (23) от безразмерного давления, определенного без этого учета [7]:



$$\varepsilon(\xi) = \left| \frac{\Pi_f - \Pi}{\Pi} \right| = \frac{\operatorname{Re}_f \left[ 1 - \left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^2 \right]}{24\xi_0 \ln \frac{\xi_0}{\xi}}. \quad (26)$$

Поскольку зависимость  $\varepsilon(\xi)$  в пределах канала является монотонной, это означает, что экстремальные значения  $\varepsilon$  может принимать только на границах интервала  $[\xi_0, \xi_1]$ . Из выражения (12 а) следует, что при увеличении  $\xi$ ,  $\varepsilon$  уменьшается. Действительно, при  $\xi \rightarrow \infty$   $\varepsilon \rightarrow 0$ , т.е. максимальное относительное отклонение  $\Pi_f$  от  $\Pi$  наблюдается в начале канала при  $\xi \rightarrow \xi_0$ :

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \varepsilon(\xi) = \frac{\operatorname{Re}_f}{24\xi_0} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \left| \frac{1 - \left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^2}{\ln \frac{\xi}{\xi_0}} \right| = \frac{\operatorname{Re}_f}{24\xi_0} \lim_{\chi \rightarrow 1} \left| \frac{1 - \chi^2}{\ln \chi} \right| \Rightarrow \quad (27)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Правило} \\ \text{Лопиталя} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}_f}{24\xi_0} \lim_{\chi \rightarrow 1} \left| \frac{-2\chi}{\frac{1}{\chi^2}} \right| = \frac{\operatorname{Re}_f}{12\xi_0}.$$

Полагая значение  $\varepsilon$  в начале канала равным 0,05, получим значение числа  $\operatorname{Re}$ , вплоть до которого можно пренебречь инерционными силами при определении перепада давления  $\frac{\operatorname{Re}_f}{12\xi} = 0,05$ , или:

$$\operatorname{Re}_f = 0,6\xi_0, \quad (28)$$

и данное значение опять совпадает с результатом, полученным в [4] для радиального течения между плоскими дисками.

С помощью решения (23) мы можем построить размерную напорно-расходную характеристику секториального канала постоянной ширины при ламинарном течении.

При необходимости учета инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала, зависимость  $\Delta P(Q)$  для плоского секториального канала будет иметь вид:

$$\Delta P(Q) = \frac{\rho}{2h_0^3} \left( \frac{Q}{2\pi h_0 \sin \alpha} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \right] + \frac{6\mu Q}{\pi h_0^3 \sin \alpha} \ln \frac{R_0}{R}. \quad (29)$$

В качестве примера рассмотрим течение жидкости со свойствами:  $\mu = 10$  Па·с,  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$  в канале с отношением координат входа и выхода равным  $\frac{R_0}{R_1} = 0.25$ .

Мы видим достаточно сильную зависимость перепада давления от угла раскрытия сектора граничных поверхностей секториального канала, что соответствует полууглу раскрытия граничных поверхностей в соосном коническом канале. Эта зависимость связана с увеличением площади поперечного сечения канала и, как следствие уменьшением средней скорости течения с увеличением угла  $\alpha$ . С разностью площадей поперечного сечения плоского и конического каналов связаны и различия в величинах перепада давлений в них для одинаковых значений  $\alpha$  и  $Q$ . Средние скорости, а значит, и напряжения сдвига на границах канала, выше при течении в соосном коническом канале, что и приводит к несколько более сильной зависимости  $\Delta P(Q)$  в случае течения в соосном коническом канале (рис. 2).

Отклонения же в величине перепада давления при течении в плоском канале от  $\Delta P(Q)$  в соосном коническом канале при малых значениях угла  $\alpha$  могут достигать больших величин (рис. 2), вследствие большого различия в площадях поперечного сечения каналов при малых  $\alpha$ .

### Заключение

В работе получено решение задачи ламинарного диффузорного течения в секториальном канале с учетом инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения. Определены критериальные значения чисел Рейнольдса, вплоть до которых можно пренебрегать указанной инерционной силой. Получена расходно-напорная характеристика таких течений и проведено ее сравнение с напорно-расходной характеристикой, полученной для диффузорного течения в соосных конических каналах.

**Обозначения:**  $h$  – ширина канала, м;  $P, P_0$  – давление текущее и на входе, Па;  $Q$  – объёмный расход,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $R, R_0, R_1$  – координата радиальная и выхода из канала и входа в него, м;  $V$  – скорость, м/с;  $\alpha$  – половина угла внешней конической поверхности, рад;  $\rho$  – удельная плотность жидкости,  $\text{кг/м}^3$ ;  $\mu$  – вязкость, Па·с.

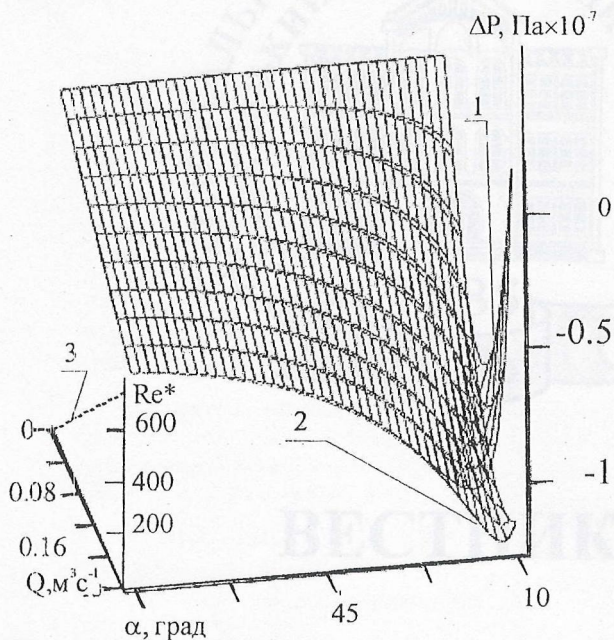


Рис. 2. Расходно-напорная характеристика соосного конического канала постоянной ширины  $h = 0.01$  м ограниченного координатами  $R_0 = 0.1$  м,  $R_1 = 0.4$  м при течении жидкости со свойствами  $\mu = 10$  Па·с и  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup> для различных значений  $\alpha$ . 1 – характеристика, полученная в биконических координатах с частичным учетом кривизны грани; 2 – характеристика, полученная в плоском приближении; 3 – изменение числа  $Re^* = 2\xi_0 \sin \alpha Re$ , при увеличении расхода жидкости

**Список литературы:** 1. Ульев Л.М. Медленные течения между соосными коническими поверхностями // ИФЖ. – 1998. – Т. 71, № 6. – С. 1092 – 1098. 2. Ульев Л.М. Медленные течения в коаксиальных конических каналах // Вестник ХГПУ. Механика. Машиностроение. Харьков, ХГПУ. 1997. Вып. 7. Ч. 2. С. 22-31. 3. Ульев Л.М. Влияние инерционных свойств на распределение давления при ламинарном конфузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины // Вестник НТУ «ХПИ». – 2002. – Вып. 9, Т. 1. – С. 88 – 94. 4. Ульев Л.М. Решение задачи ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины с частичным учетом инерционных свойств // Вестник НТУ «ХПИ». – 2002. – № 6. – С. 66 – 71. 5. Слезкин Н.А. Динамика вязкой жидкости. – М.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1955. – С. 520. 6. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. – М.-Л.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1951. – С. 420. 7. Ульев Л.М. Течение и теплообмен в кольцевых конических каналах. Аппроксимация плоским каналом // Интегровані технології та енергозбереження. – Харьков. – 2000, – №2. – С. 55 – 64.

Поступила в редколлегию 09.03.03