

ISSN 0040-3571

Том 35, Номер 1

Январь - Февраль 2001



ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Главный редактор
А.М. Кутепов

<http://www.maik.ru>



“НАУКА”

МАИК “НАУКА/ИНТЕРПЕРИОДИКА”

УДК 536.24:532.135

ЛАМИНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ ДИФFUЗОРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В КОАКСИАЛЬНОМ КОНИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ ВНУТРЕННЕЙ СТЕНКИ

© 2001 г. Л. М. Ульев

Харьковский государственный политехнический университет, Украина

Поступила в редакцию 17.05.99 г.

Рассмотрена задача конвективного теплообмена при медленных диффузорных течениях в коаксиальных кольцевых конических каналах постоянной ширины с тепловыми граничными условиями первого рода и линейным изменением температуры внутренней поверхности вдоль течения. Решение получено методом разложения по собственным функциям. Температурная зависимость от координат представлена в виде суммы двух бесконечных рядов по конфлюэнтным гипергеометрическим функциям от поперечной координаты, которые умножены на экспоненциальную зависимость от продольной координаты и угла раскрытия канала. Решение интересно тем, что является суперпозицией двух решений, каждое из которых имеет свои собственные функции и собственные значения.

В формующем оборудовании для экструзионного способа производства стренг, гранул, труб, пленок и других полимерных изделий существуют проточные элементы в виде коаксиальных конических диффузоров, через которые продавливается расплав [1, 2]. Выбор оптимальных технологических и конструктивных параметров процесса формования связан с исследованием течения и теплообмена расплава полимера в каналах экструзионных головок. Современные технологии позволяют создавать различные режимы теплообмена на границах каналов, но экспериментальный подбор оптимальных характеристик процесса требует значительных средств. Построение численных моделей процессов переработки полимеров также не всегда оправдано, так как во многих случаях можно получить адекватные соотношения между параметрами процессов, используя аналитические решения. В дальнейшем эти решения могут служить основой для разработки численных, асимптотических и приближенных методов расчета.

В работах [3, 4] решена задача изотермического течения в коаксиальных конических каналах с различным расположением граничных поверхностей. В [5] исследован ламинарный теплообмен в конических зазорах при граничных условиях третьего рода. Однако в некоторых случаях (например при подводном гранулировании, в случае необогреваемого дорна) течение происходит в условиях явного изменения температуры одной из стенок канала вдоль течения. Температура внутренней стенки (границы, образованной внутренней конической поверхностью) распределительно участка изменяется от температуры расплава

полимера на входе в головку практически до температуры воды, уносящей гранулы. В случае обогреваемого дорна температура внутренней стенки на входе в канал может превышать температуру расплава, а в случае обогреваемой фильерной доски [6] температура внутренней стенки канала может повышаться вдоль течения. В процессах экструзионно-выдувного формования характер изменения температуры внутренней стенки коаксиального конического канала будет определяться температурой воздуха, подаваемого в формующую головку.

С целью изучения распределения температуры расплава полимера в указанных процессах в данной работе рассматривается ламинарный теплообмен в коаксиальных конических каналах с граничными условиями первого рода при заданном изменении температуры внутренней поверхности канала для течения расплавов полимеров, которые в пределах изменения параметров переработки ведут себя как ньютоновские жидкости [7].

В [5] показано, что для практически важных значений расхода жидкости и размеров канала число Рейнольдса $Re \ll 1$, число Нема–Гриффита $Gn \ll 1$, число Пекле $Pe \gg 100$. Данные оценки позволяют рассматривать течение расплава как ползущее течение [8], а в уравнении теплопереноса не учитывать теплоту диссипации и пренебречь изменением кондуктивного теплового потока вдоль течения по сравнению с изменением конвективного теплового потока и, в итоге, записать систему уравнений аксиально-симметричного конвективного теплообмена в биконической

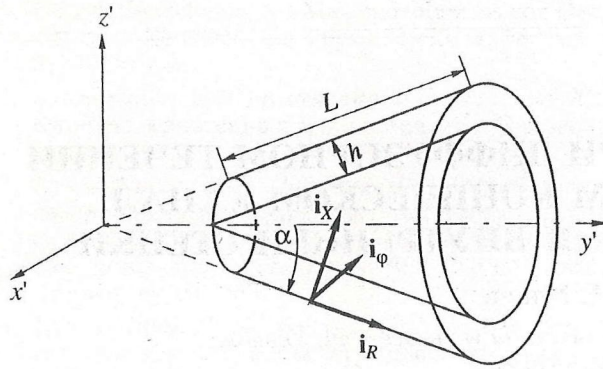


Рис. 1. Геометрия конического зазора постоянной ширины (i_R, i_X, i_ϕ – орты биконической системы координат).

системе координат (рис. 1), определяемой преобразованием [9]:

$$z' = R \cos \alpha + X \sin \alpha, \quad (1)$$

$$y' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \sin \phi, \quad (2)$$

$$x' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \cos \phi, \quad (3)$$

в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sigma \frac{\partial v}{\partial \chi} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} = \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sigma^2} v, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\sigma v) = 0, \quad (6)$$

$$Pe_0 v \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \right), \quad (7)$$

где

$$\xi = R/h, \quad \chi = X/h,$$

$$V_0 = Q/[\pi h(2R_0 \sin \alpha - h \cos \alpha)],$$

$$v = V_R/V_0, \quad \Pi = (P - P_0)h/(\gamma V_0),$$

$$\sigma = \xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha, \quad Pe_0 = V_0 h/a,$$

$$\Theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0).$$

Граничные и краевые условия имеют вид

$$v = 0, \quad \chi = 0, \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1; \quad (8)$$

$$v = 0, \quad \chi = 1, \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1; \quad (9)$$

$$\Pi = 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad \xi = \xi_0; \quad (10)$$

$$\Theta = 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad \xi = \xi_0; \quad (11)$$

$$\Theta = 1, \quad \chi = 0, \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1; \quad (12)$$

$$\Theta = \Theta_2 + b(\xi - \xi_0), \quad \chi = 1, \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1. \quad (13)$$

Здесь

$$b = \frac{T_3 - T_2}{(T_1 - T_0) \Delta \xi} < 1, \quad \Delta \xi = \xi_1 - \xi_0 = L/h.$$

Для практически важных случаев, когда $\xi \tan \alpha \gg 1$, решение системы уравнений (4)–(6), (8)–(10) в принятых обозначениях имеет вид [3]:

$$v = \frac{6(2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)}{\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha} (\chi^2 - \chi), \quad (14)$$

$$\Pi = -\frac{6(\cos \alpha - 2\xi_0 \sin \alpha)}{\sin \alpha} \ln \frac{1 - 2\xi \tan \alpha}{1 - 2\xi_0 \tan \alpha}, \quad (15)$$

тогда уравнения (7) запишем следующим образом:

$$\frac{6Pe_0(2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)}{\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha} (\chi^2 - \chi) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \chi^2}. \quad (16)$$

Для того чтобы получить решение задачи (16), (11)–(13), представим его в виде суперпозиции двух решений

$$\Theta(\chi, t) = \Xi_1(\chi, t) + \Xi_2(\chi, t), \quad (17)$$

где $t = 2\chi - 1$; $\Xi_1(\xi, t)$ – решение уравнения (16) для следующих граничных условий:

$$\Xi_1 = \frac{1 + \Theta_2 + b(\xi - \xi_0)}{2}, \quad t = -1; \quad (18)$$

$$\Xi_1 = \frac{1 + \Theta_2 + b(\xi - \xi_0)}{2}, \quad t = 1; \quad (19)$$

$$\Xi_1 = 0, \quad \xi = \xi_0, \quad -1 < t < 1; \quad (20)$$

$\Xi_2(\xi, t)$ – решение (16) для

$$\Xi_2 = \frac{1 - \Theta_2 - b(\xi - \xi_0)}{2}, \quad t = -1; \quad (21)$$

$$\Xi_2 = \frac{-1 + \Theta_2 + b(\xi - \xi_0)}{2}, \quad t = 1; \quad (22)$$

$$\Xi_2 = 0, \quad \xi = \xi_0, \quad -1 < t < 1. \quad (23)$$

Для решения задач (16), (18)–(20) и (16), (21)–(23) введем новые зависимые переменные, определяемые преобразованиями

$$\Xi_1(\xi, t) = \Phi_1(\xi, t) + \frac{1 + \Theta_2 + b(\xi - \xi_0)}{2}, \quad (24)$$

$$\Xi_2(\xi, t) = \Phi_2(\xi, t) + \frac{\Theta_2 - 1 + b(\xi - \xi_0)}{2} t, \quad (25)$$

Функции $\Phi_i(\xi, t)$ (здесь и далее $i = 1, 2$) преобразуют неоднородные граничные условия (18), (19), (21), (22) в однородные

$$\Phi_i = 0, \quad \chi = 0, \quad t = -1; \quad (26)$$

$$\Phi_i = 0, \quad \chi = 1, \quad t = 1, \quad (27)$$

а условия на входе в канал (20), (23) преобразуются к виду

$$\Phi_1(\xi_0, t) = \frac{-1 + \Theta_2}{2}, \quad (28)$$

$$\Phi_2(\xi_0, t) = \frac{1 - \Theta_2}{2} t. \quad (29)$$

Далее, подставляя функции $\bar{E}_i(\xi, t)$ в уравнение (16) и учитывая замену переменных, получим для $\Phi_i(\xi, t)$ неоднородные уравнения

$$\frac{8(\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha)}{3\text{Pe}(1-t^2)} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi} + f_i(\xi, t) = 0, \quad (30)$$

где

$$\text{Pe} = Q/(\pi a h),$$

тогда

$$\text{Pe}_0 = \frac{\text{Pe}}{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha},$$

а для f_i из (24) и (25) следует, что

$$f_1(\xi, t) = b/2, \quad f_2(\xi, t) = bt/2.$$

Представляя решение (30) в виде произведения $\Phi_i(\xi, t) = Y_i(\xi)\Psi_i(\chi)$ (по i суммирование не проводится) и рассматривая соответствующее (30) однородное уравнение, приходим к задаче Штурма-Лиувилля, которая определится системой уравнений

$$\Psi_i'' + \mu_i^2(1-t^2)\Psi_i = 0, \quad (31)$$

$$\Psi_i = 0, \quad t = -1; \quad (32)$$

$$\Psi_i = 0, \quad t = 1, \quad (33)$$

где $\mu_i = \beta_i/4$, β_i – постоянная разделения для однородного уравнения (30).

В [5] показано, что уравнение (31) сводится к уравнению Уиттекера и имеет решение

$$\Psi(t) = C_1 \sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu}{4}, \frac{3}{2}; \mu t^2\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\mu t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu}{4}, \frac{1}{2}; \mu t^2\right), \quad (34)$$

где ${}_1F_1(\alpha, \gamma, x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция; C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Подставляя (34) в (32) и (33), получим

$$\begin{aligned} & -C_1 \sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu}{4}, \frac{3}{2}; \mu\right) + \\ & + C_2 \sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu}{4}, \frac{1}{2}; \mu\right) = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & C_1 \sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu}{4}, \frac{3}{2}; \mu\right) + \\ & + C_2 \sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu}{4}, \frac{1}{2}; \mu\right) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Очевидно, что уравнения (35), (36) совместны, только когда $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$. В первом случае уравнение для определения собственных значений имеет вид

$${}_1F_1\left(\frac{1-\mu}{4}, \frac{1}{2}; \mu\right) = 0, \quad (37)$$

собственными функциями задачи являются

$$\Psi_{1n} = C \exp\left(-\frac{\mu_{1n} t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu_{1n}}{4}, \frac{1}{2}; \mu_{1n} t^2\right). \quad (38)$$

При $C_2 = 0$ собственные значения определяются из уравнения

$${}_1F_1\left(\frac{3-\mu}{4}, \frac{3}{2}; \mu\right) = 0, \quad (39)$$

тогда собственными функциями будут

$$\Psi_{2n} = C \sqrt{\mu_{2n}} \exp\left(-\frac{\mu_{2n} t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu_{2n}}{4}, \frac{3}{2}; \mu_{2n} t^2\right). \quad (40)$$

Заметим, что значение μ_n можно с приемлемой для расчетов точностью вычислить, используя соотношение [10] $\mu_{1n} = 4n + 5/3$, и, как показывают расчеты при $n > 4$, выполняется равенство $\mu_{2n} = \mu_{1n} + 2$.

Используя (31)–(33), легко показать, что системы функций, определяемые равенствами (38), (40), являются ортогональными с весом $(1-t^2)$ на отрезке $[-1, 1]$. Поэтому источниковый член в уравнении (30) можно представить в виде разложения по собственным векторам задачи (31)–(33):

$$f_i(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{in}(\xi) \Psi_{in}, \quad (41)$$

что позволяет, используя свойство ортогональности собственных функций, определить коэффициенты разложения $f_{in}(\xi)$:

$$f_{in} = \left(\int_{-1}^1 (1-t^2) f_i(\xi, t) \Psi_{in}(t) dt \right) / \|\Psi_{in}\|^2, \quad (42)$$

где

$$\|\Psi_{in}\|^2 = \int_{-1}^1 (1-t^2) \Psi_{in}^2 dt$$

– квадрат нормы собственных функций.

Функция $(1-t^2)$ четная на отрезке $[-1, 1]$, а $f_1(\xi)$ не зависит от t , и тогда, если выбрать в качестве базиса для решения задачи (16), (18)–(20) функции, определяемые соотношениями (39), (40), нечетные на этом отрезке, получим, что все $f_{1n}(\xi) = 0$. Поэтому в качестве ортогонального базиса в этом случае необходимо выбрать систему функций, определяемых соотношениями (37), (38).

Аналогично для решения задачи (16), (21)–(23), где функция $f_{2n}(\xi, t)$ нечетная на отрезке $[-1, 1]$, в качестве базисных функций выберем нечетные функции (39), (40).

Следовательно (42) можно переписать в виде

$$f_{1n} = \frac{b^{-1}}{2} \frac{\int_{-1}^1 (1-t^2) \Psi_{1n}(t) dt}{\|\Psi_{1n}\|^2} = \frac{b}{2} M_n, \quad (43)$$

$$f_{2n} = \frac{b^{-1}}{2} \frac{\int_{-1}^1 t(1-t^2) \Psi_{2n}(t) dt}{\|\Psi_{2n}\|^2} = \frac{b}{2} K_n. \quad (44)$$

Тем самым определены собственные функции поставленных задач. Следовательно, общие решения задач (16), (18)–(20) и (16), (21)–(23), являющиеся суммой соответствующих частных решений, примут вид

$$\Phi_1(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{1n}(\xi) \times \exp\left(-\frac{\mu_{1n} t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu_{1n}}{2}, \frac{1}{2}; \mu_{1n} t^2\right), \quad (45)$$

$$\Phi_2(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n}(\xi) \times \exp\left(-\frac{\mu_{2n} t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu_{2n}}{2}, \frac{3}{2}; \mu_{2n} t^2\right). \quad (46)$$

Далее подставляя функции Φ_i и разложения (43), (44) в уравнение (30) и начальные условия, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $Y_{in}(\xi)$:

$$Y'_{in} - \frac{8\mu_i}{3Pe} (\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha) Y_{in} + f_{in} = 0, \quad (47)$$

$$Y_{in}(\xi_0) = \left(\int_{-1}^1 \Phi_i(\xi_0, t) (1-t^2) \Psi_{in}(t) dt \right) / \|\Psi_{in}\|^2. \quad (48)$$

Решения (47), (48) можно получить, используя

метод вариации произвольной постоянной

$$Y_{1n}(\xi) = -\frac{M_n}{2} \left\langle \frac{1 + \Theta_2}{2} \times \exp\left\{ \frac{8\mu_{1n}^2 (\xi - \xi_0) [\cos \alpha - (\xi + \xi_0) \sin \alpha]}{3Pe} \right\} + \frac{b}{6Pe} I_{1n} \right\rangle, \quad (49)$$

$$Y_{2n}(\xi) = -\frac{K_n}{2} \left\langle \frac{1 - \Theta_2}{2} \times \exp\left\{ \frac{8\mu_{2n}^2 (\xi - \xi_0) [\cos \alpha - (\xi + \xi_0) \sin \alpha]}{3Pe} \right\} + \frac{b}{6Pe} I_{2n} \right\rangle, \quad (50)$$

где

$$I_{in} = \int_{\xi_0}^{\xi} (\cos \alpha - 2\tau \sin \alpha) \times \exp\left\{ \frac{8\mu_{in}^2 (\xi - \tau) [\cos \alpha - (\xi + \tau) \sin \alpha]}{3Pe} \right\} d\tau. \quad (51)$$

Возвращаясь к исходным переменным, запишем решение задачи

$$\Theta(\xi, \chi) = 1 + [\Theta_2 - 1 + b(\xi - \xi_0)] \chi + \Phi_1(\xi, \chi) + \Phi_2(\xi, \chi), \quad (52)$$

с помощью которого вычислим среднемассовую температуру потока

$$\bar{\Theta} = \frac{2\pi \int_0^1 v \Theta(\xi, \chi) (\xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha) d\chi}{\bar{v} \pi (2\xi \sin \alpha - \cos \alpha)} = \frac{12}{\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha} \int_0^1 (\chi^2 - \chi) \Theta(\xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha) d\chi, \quad (53)$$

где

$$\bar{v} = \frac{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha}{2\xi \sin \alpha - \cos \alpha} \quad (54)$$

– средняя безразмерная скорость.

При определении безразмерных местных тепловых потоков на границах канала – чисел Нуссельта Nu – традиционным способом, т.е. относительными коэффициентами теплоотдачи к разности между

среднемассовой температурой потока и температурой стенки

$$\begin{aligned} Nu_1 &= \frac{\alpha_1 h}{\lambda} = \frac{\partial \Theta / \partial \chi|_{\chi=0}}{\Theta - \Theta|_{\chi=0}}, \\ Nu_2 &= \frac{\alpha_2 h}{\lambda} = -\frac{\partial \Theta / \partial \chi|_{\chi=1}}{\Theta - \Theta|_{\chi=1}}, \end{aligned} \quad (55)$$

числа Nu_i могут иметь разрывы для значений координаты ξ , при которых среднемассовая температура сравнивается с температурой одной из стенок. Это может произойти и в том случае, если коэффициент теплоотдачи отнести к разности между среднемассовой температурой и средней температурой (начальной или текущей) стенок. Поэтому определим безразмерные коэффициенты теплоотдачи как отношение тепловых потоков на границах канала к масштабу температуры

$$Nu^* = -\frac{\partial \Theta}{\partial n} \Big|_{n=0}, \quad (56)$$

где n – нормаль, направленная в сторону жидкости. Тогда получим выражения, определяющие безразмерные тепловые потоки на границах канала

$$Nu_1^* = -\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0}, \quad Nu_2^* = \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1}. \quad (57)$$

Выполняя дифференцирование в (57), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} &= \Theta_2 - 1 + b(\xi - \xi_0) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} Y_{1n} \Psi'_{1n} \Big|_{\chi=0} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n} \Psi'_{2n} \Big|_{\chi=0}, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} &= \Theta_2 - 1 + b(\xi - \xi_0) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} Y_{1n} \Psi'_{1n} \Big|_{\chi=1} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n} \Psi'_{2n} \Big|_{\chi=1}, \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi'_{1n} \Big|_{\chi=0} &= -\Psi'_{1n} \Big|_{\chi=1} = \\ &= -2\mu_{1n}(1 - \mu_{1n}) \exp\left(-\frac{\mu_{1n}}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{5 - \mu_{1n}}{4}, \frac{3}{2}; \mu_{1n}\right), \\ \Psi'_{2n} \Big|_{\chi=0} &= \Psi'_{2n} \Big|_{\chi=1} = \\ &= \frac{2\sqrt{\mu_{2n}\mu_{2n}(3 - \mu_{2n})}}{3} \exp\left(-\frac{\mu_{2n}}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{7 - \mu_{2n}}{4}, \frac{5}{2}; \mu_{2n}\right). \end{aligned}$$

Вследствие того, что выражения (57) полностью определяются производными от температуры при

анализе тепловых потоков на границах канала, будем использовать выражения (58), (59).

Параметрами, определяющими решение задачи, являются число Re , начальная безразмерная температура внутренней стенки Θ_2 , безразмерная координата входа в канал ξ_0 , угол раствора диффузора 2α и параметр b , определяющий распределение температуры поверхности внутренней стенки (границы канала при $\chi = 1$) вдоль канала.

Решение с параметрами $b > 0$, $\Theta_2 = 0$ определяет особенности теплообмена при течении с начальной температурой внутренней поверхности канала T_2 , равной температуре жидкости на входе T_0 и уменьшающейся вдоль канала до некоторой температуры $T_3 < T_2$ для условия $T_1 < T_0$, а для условия $T_1 > T_0$ – увеличивающейся до температуры $T_3 > T_2$.

Первый случай встречается в устройствах погружного гранулирования без обогрева дорна и фильерной доски. Второй случай может встретиться при экструзионно-выдувном формовании полимерных пленок или при подводном гранулировании с наружным обогревом распределительного участка и обогреваемыми фильерными каналами [6].

Решение при $b < 0$, $\Theta_2 = 0$ соответствует течению в канале, температура внешней стенки которого меньше температуры расплава на входе в канал $T_1 < T_0$, а температура внутренней стенки изменяется от T_0 до $T_3 > T_2$, что может соответствовать течению в распределительном участке погружного гранулирующего устройства с обогреваемой фильерной доской и необогреваемым корпусом. При $T_1 > T_0$ решение соответствует течению, указанному в предыдущем случае, но с обогреваемым корпусом и необогреваемой фильерной плитой.

При теплообмене с $b > 0$, $\Theta_2 = 0$ тепловой пограничный слой более интенсивно развивается у внешней стенки канала (рис. 2), здесь же наблюдаются наибольшие значения числа Nu_1^* (57), но по мере развития поля температур значения Nu_1^* уменьшаются (рис. 3). Число Nu_2^* на внутренней границе канала вблизи входа в канал близко к нулю, но увеличивается с изменением температуры стенки (рис. 3). Среднемассовая температура потока для рассматриваемых значений числа Re и граничных условий монотонно растет вдоль течения, оставаясь при этом ниже температуры внутренней стенки (рис. 4).

Уменьшение числа Re приводит к увеличению роли кондуктивного теплопереноса, и тепловой пограничный слой развивается на меньшем расстоянии от входа в канал (рис. 2б). Безразмерный тепловой поток Nu_1^* на внешней стенке канала резко уменьшается с развитием теплового пограничного

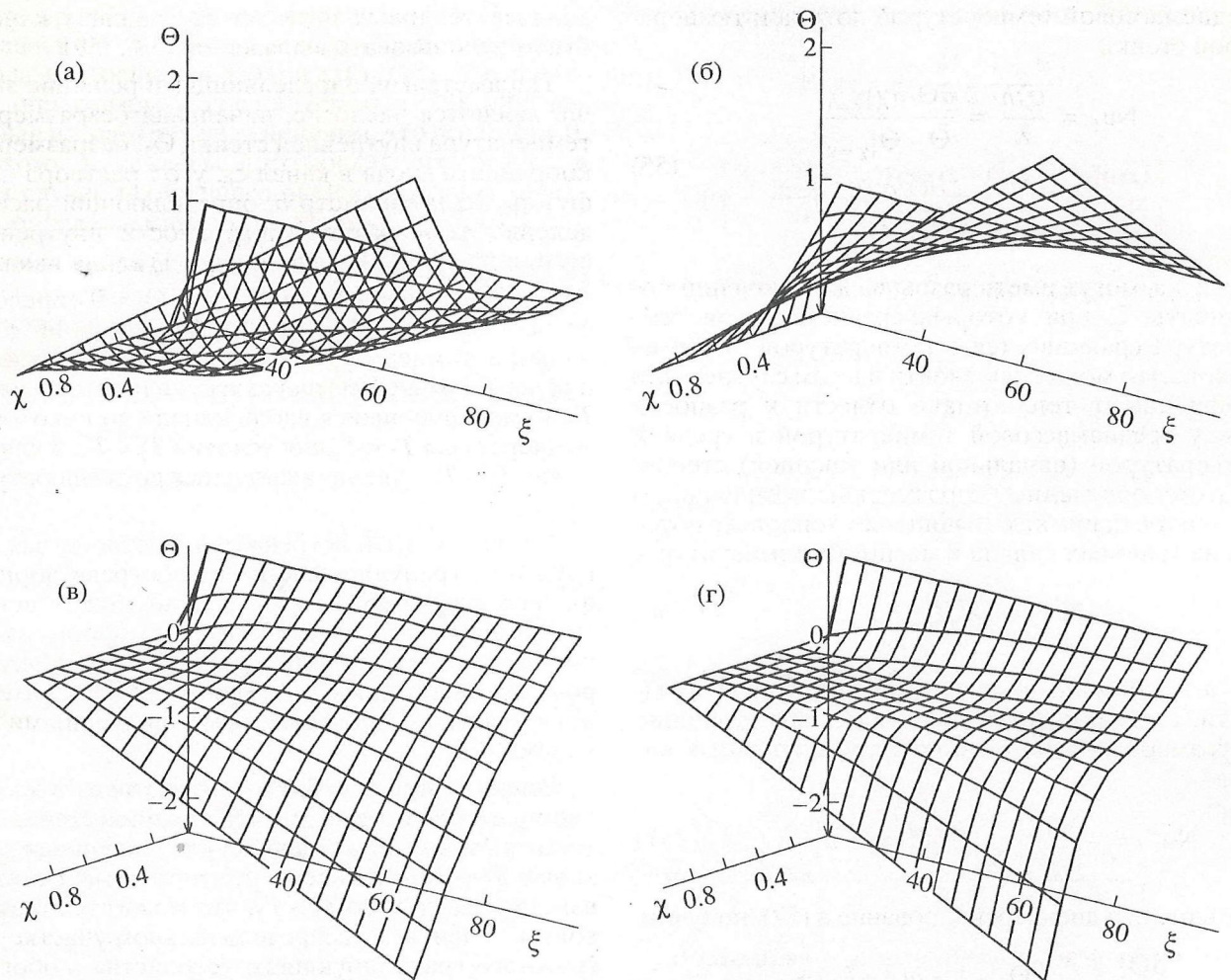


Рис. 2. Распределение Θ в канале при $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 100$: (а) $\alpha = 15^\circ$, $Pe = 10^4$, $\Theta_2 = 0$, $b = 0.03$; (б) $\alpha = 90^\circ$, $Pe = 2 \times 10^3$, $\Theta_2 = 0$, $b = 0.03$; (в) $\alpha = 60^\circ$, $Pe = 2 \times 10^4$, $\Theta_2 = 0$, $b = -0.03$; (г) $\alpha = 5^\circ$, $Pe = 2 \times 10^4$, $\Theta_2 = 0$, $b = -0.03$.

слоя вдоль течения и на некотором расстоянии от входа меняет знак (рис. 3). Это связано с тем, что безразмерная температура потока по всему поперечному сечению канала становится выше безразмерной температуры внешней границы канала за счет теплообмена с внутренней поверхностью, безразмерная температура которой увеличивается вдоль течения (рис. 2).

Тепловой поток Nu_2^* на внутренней стенке канала вблизи входа несколько увеличивается вдоль течения вследствие возрастания температуры стенки. Однако поскольку на внешней стенке безразмерная температура вблизи входа значительно выше, чем на внутренней, а тепловой пограничный слой при данных значениях числа Pe быстро распространяется на все поперечное сечение канала, безразмерная температура потока вблизи внутренней стенки становится выше безразмерной температуры стенки, и тепловой поток Nu_2^* меняет знак. Это означает, что характер теплооб-

мена на внешней и внутренней стенках на этом расстоянии становится разным, т.е. если жидкость нагревается от внешней стенки канала, то на внутренней она начинает охлаждаться и наоборот. При дальнейшем течении безразмерная температура внутренней стенки становится выше безразмерной температуры потока прилегающей жидкости, и тепловой поток вновь изменяет направление (рис. 3). Затем распределение температуры для любого поперечного сечения канала становится практически линейным (рис. 2), т.е. в разложениях (58), (59) при увеличении ξ остается значимым только линейный член, и для предельных значений Nu_1^* , Nu_2^* можно записать

$$Nu_{1\infty}^* = -Nu_{2\infty}^* = \Theta_2 - 1 + b(\xi - \xi_0). \quad (60)$$

Безразмерная среднемассовая температура потока жидкости вблизи входа увеличивается в большей мере за счет теплообмена с внешней стенкой канала, из-за чего ее значение превосходит безразмерную температуру внутренней стенки на этом

участке. Однако вследствие увеличения безразмерной температуры внутренней стенки вдоль течения, на некотором расстоянии от входа температуры выравниваются, и в дальнейшем изменение температуры потока будет происходить за счет теплообмена с внутренней стенкой, безразмерная температура которой становится больше как безразмерной среднемассовой температуры, так и безразмерной температуры внешней стенки. Вследствие этого значение безразмерной среднемассовой температуры жидкости при дальнейшем течении превосходит значение безразмерной температуры внешней стенки (рис. 4).

Зависимость чисел Нуссельта, определенных традиционным способом (55), от ξ в точках, где среднемассовая температура жидкости сравнивается с температурой стенок, будет иметь разрыв (рис. 5), хотя особенностей распределения температуры в потоке здесь не наблюдается. Поэтому для анализа конвективного теплообмена в каналах, поперечное сечение которых является многосвязной областью, по-видимому, лучше использовать выражение (57) для безразмерного теплового потока. Тем не менее при дальнейшем течении числа Nu_1 , Nu_2 стремятся к своему предельному значению $Nu_{1\infty} = Nu_{2\infty} = 2$ (рис. 5). Заметим, что Nu_1 стремится к 2 снизу, а Nu_2 — сверху для всех вариантов теплообмена, исследованных в данной работе.

Существование предельных чисел Нуссельта говорит о том, что при увеличении параметра

$$8(\xi - \xi_0)[\cos \alpha - (\xi + \xi_0) \sin \alpha] / (3Pe)$$

и, в частности, увеличения ξ изменение тепловых потоков на границах канала пропорционально изменению соответствующих разностей между температурой стенок и среднемассовой температурой жидкости. Это свидетельствует о стабилизации теплообмена. Сравнивая выражения (53), (58) и учитывая значения Nu_{∞} , для стабилизированного теплообмена можно записать

$$\bar{\Theta}_{\infty} = \frac{1 + \Theta_2}{2} + \frac{b}{2}(\xi - \xi_0). \quad (61)$$

Рассмотрим теплообмен при $b < 0$, $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 100$, $\Theta_2 = 0$, $Pe = 2 \times 10^4$, $\alpha = 60^\circ$.

Безразмерная температура жидкости у внешней стенки канала повышается более значительно, чем снижается у внутренней стенки, благодаря чему среднемассовая температура жидкости в начале канала несколько увеличивается, но по мере снижения безразмерной температуры внутренней стенки начинает уменьшаться (рис. 4).

Тепловой поток на внешней стенке канала Nu_1^* (57) является немонотонной функцией продольной координаты. Сначала он уменьшается по мере развития теплового пограничного слоя,

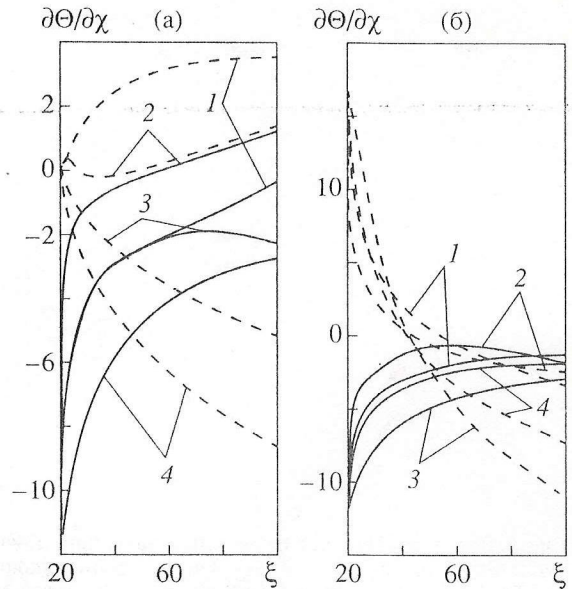


Рис. 3. Распределение $\partial\Theta/\partial\xi$ на границах канала $\chi = 0$ (сплошные линии), $\chi = 1$ (пунктирные линии): (а) — $\Theta_2 = 0$; $Pe = 10^4$ (1), 2×10^3 (2), 2×10^4 (3), 10^4 (4); $\alpha = 15$ (1), 90 (2), 60 (3), 5 (4) град.; $b = 0.03$ (1, 2), -0.03 (3, 4); (б) — $\Theta_2 = 1.5$; $Pe = 10^4$ (1, 2), 7×10^4 (3, 4); $\alpha = 15$ (1, 3), 90 (2, 4) град.; $b = -0.03$ (1, 2), -0.05 (3, 4).

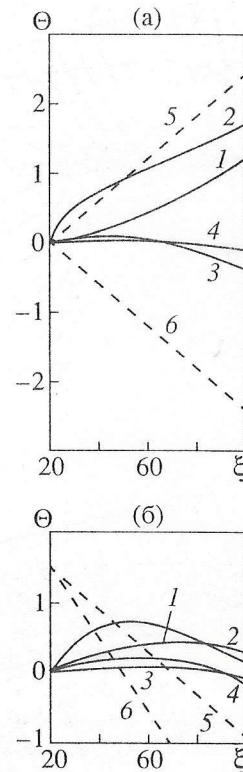


Рис. 4. Распределение Θ в канале: (а) — $\Theta_2 = 0$; $Pe = 10^4$ (1), 2×10^3 (2), 2×10^4 (3), 10^4 (4); $\alpha = 15$ (1), 90 (2), 60 (3), 5 (4) град.; $b = 0.03$ (1, 2), -0.03 (3, 4); линии 5, 6 — безразмерная температура внутренней поверхности канала $\chi = 1$ при $b = 0.03$, -0.03 соответственно; (б) — $\Theta_2 = 1.5$; $Pe = 10^4$ (1, 2), 7×10^4 (3, 4); $\alpha = 15$ (1, 3), 90 (2, 4) град.; $b = -0.03$ (1, 2), -0.05 (3, 4); линии 5, 6 — безразмерная температура внутренней поверхности канала $\chi = 1$ при $b = -0.03$, -0.05 соответственно.

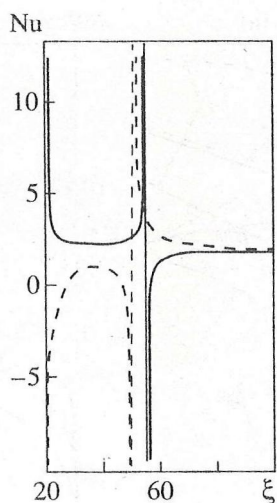


Рис. 5. Распределение числа Nu_1 (сплошные линии) на границе $\chi = 0$, Nu_2 (пунктирные линии) вдоль канала при $Pe = 2 \times 10^3$, $\alpha = 90^\circ$, $b = 0.03$, $\Theta_2 = 0$.

достигает своего минимального значения и далее (при установлении линейного распределения температуры в канале) начинает увеличиваться согласно (60). Тепловой поток на внутренней стенке Nu_2^* монотонно возрастает по абсолютной величине вследствие изменения температуры стенки (рис. 3).

При $\alpha = 5^\circ$ и прежних значениях остальных параметров тепловой пограничный слой не успевает распространиться на все поперечное сечение канала. Это происходит как за счет увеличения скорости течения жидкости в канале, которая при постоянном числе Pe увеличивается по гиперболическому закону при уменьшении α (54), так и из-за уменьшения поверхности теплообмена. Поэтому безразмерный тепловой поток Nu_1^* монотонно уменьшается, а Nu_2^* увеличивается в пределах канала (рис. 3). Изменения среднemasсовой температуры также незначительны (рис. 3).

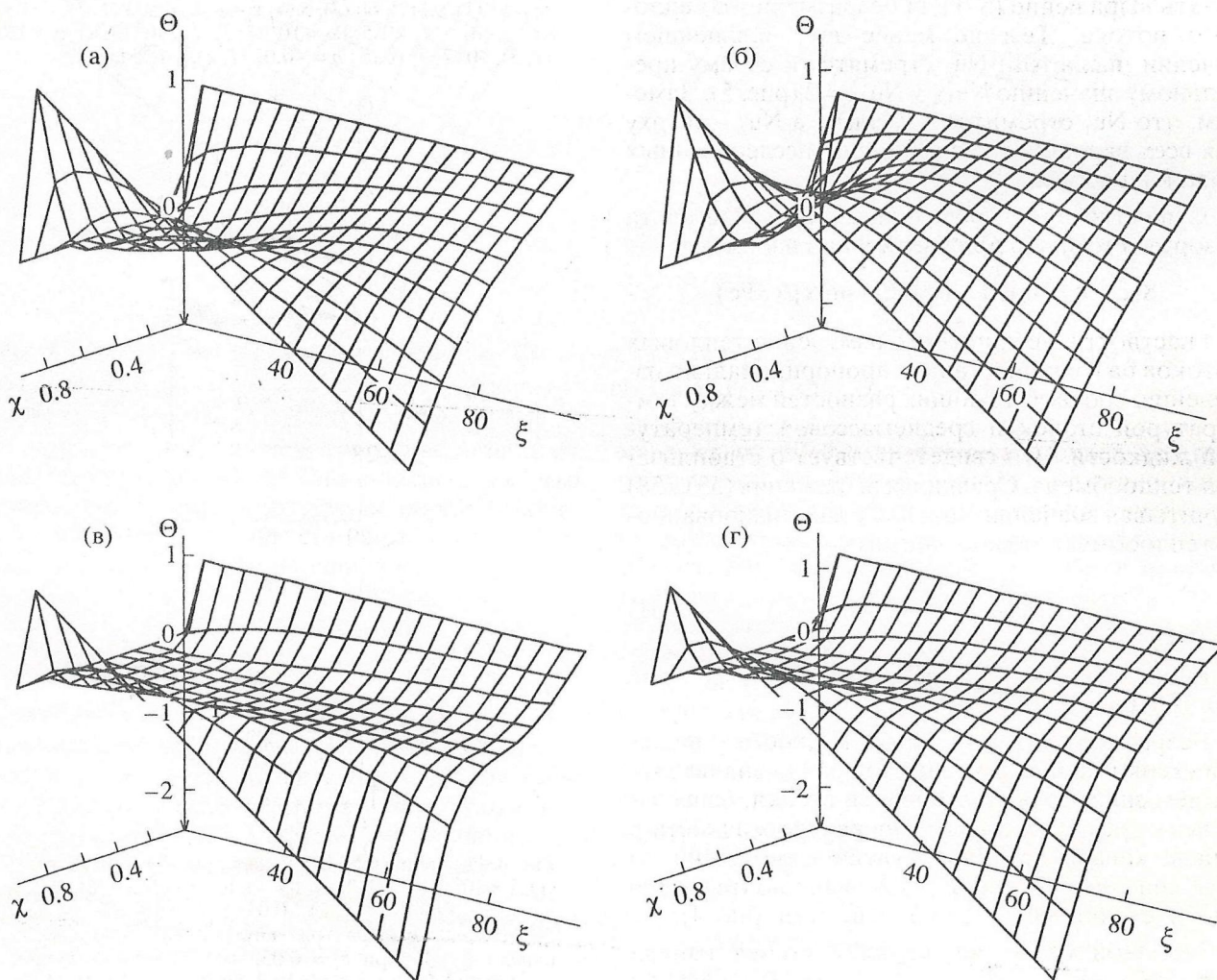


Рис. 6. Распределение Θ в канале при $\xi_0 = 20$; $\xi_1 = 100$; $\Theta_2 = 1.5$; $\alpha = 15$ (а), (в), 90 (б), (г) град.; $Pe = 10^4$ (а), (б), 7×10^4 (в), (г); $b = -0.03$ (а), (б), -0.05 (в), (г).

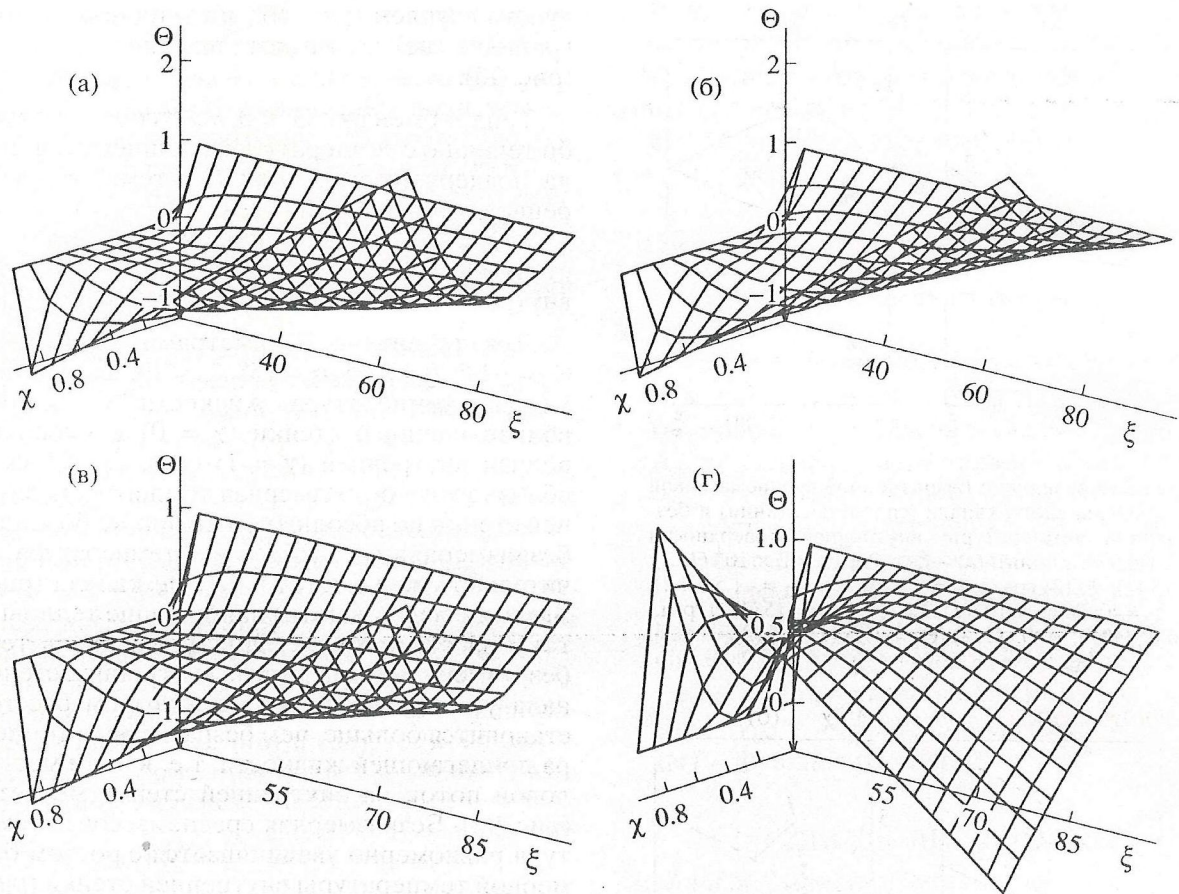


Рис. 7. Распределение Θ в канале при $\xi_0 = 20$ (а), (б), 40 (в), (г); $\xi_1 = 100$; $\Theta_2 = 1.5$; $\alpha = 15$ (а), (в), (г), 90 (б) град; $Re = 2 \times 10^4$ (а)–(в), 2×10^3 (г); $b = 0.05$ (а)–(в), -0.03 (г).

Теплообмен с $\Theta_2 = 0$ и $b < 0$ при $T_1 < T_0$ соответствует течению расплава полимера в канале, когда вершина дорна охлаждается до температуры меньшей, чем T_0 , и далее температура его поверхности увеличивается. А при $T_1 > T_0$ вершина дорна имеет температуру выше температуры расплава, и вдоль канала температура поверхности дорна снижается.

Для теплообмена при $Re = 10^4$, $\Theta_2 = 1.5$, $b = -0.03$, $\xi_0 = 20$, $\alpha = 15^\circ$ течение происходит на начальном тепловом участке, о чем говорит как неустановившийся характер распределения температуры в потоке (рис. 6), так и изменение тепловых потоков на границах (рис. 3б). Безразмерная температура увеличивается на периферии потока практически одинаково у обеих границ в начале канала, но по мере уменьшения безразмерной температуры внутренней поверхности канала, безразмерная температура теплового пограничного слоя у этой поверхности становится отрицательной, следуя за температурой границы. Поперечное распределение температуры приближается к линейному, но при рассматриваемых параметрах в пределах канала стабилизация теп-

лообмена не происходит (рис. 6). Среднемассовая температура потока вследствие такого распределения локальной температуры изменяется монотонно (рис. 4б).

Увеличение угла раствора канала до $\alpha = 90^\circ$ при сохранении остальных параметров приводит, как показано ранее, к уменьшению средней скорости течения и увеличению поверхности теплообмена. Вследствие этого время пребывания жидкости в канале увеличивается, и тепловые пограничные слои у стенок канала распространяются на все поперечное сечение канала на более коротком расстоянии от входа (рис. 6б). Максимальные значения среднемассовой безразмерной температуры здесь выше, чем при $\alpha = 15^\circ$ (рис. 4б), и в пределах канала устанавливается линейное изменение температуры как поперек, так и вдоль течения. Поэтому безразмерные тепловые потоки на стенках описываются здесь предельными линейными зависимостями (60) (рис. 3б).

Рост числа Пекле до 7×10^4 приводит к увеличению роли конвективного теплопереноса в теплообмене и, как следствие, к увеличению длины начального теплового участка. Тепловой погра-

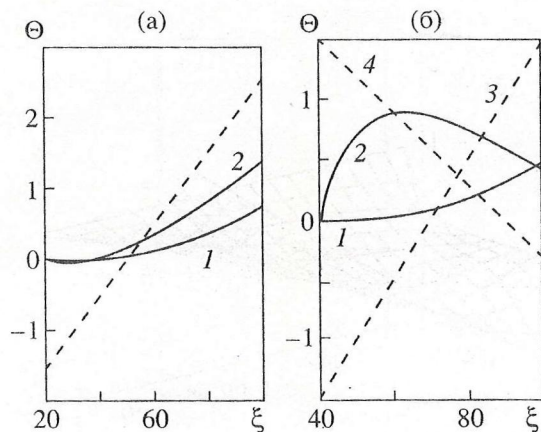


Рис. 8. Распределение безразмерной среднемассовой температуры вдоль канала (сплошные линии) и безразмерной температуры внутренней поверхности (пунктирные линии): (а) — $\xi_0 = 20$; $Pe = 2 \times 10^4$ (1, 2); $\alpha = 15$ (1), 90 (2) град.; $b = 0.05$ (1, 2); $\Theta_2 = -1.5$ (1, 2); (б) — $\xi_0 = 40$; $Pe = 2 \times 10^4$ (1), 2×10^3 (2); $\alpha = 15$ (1, 2) град.; $b = 0.05$ (1, 3), -0.03 (2, 4); $\Theta_2 = -1.5$ (1), 1.5 (2).

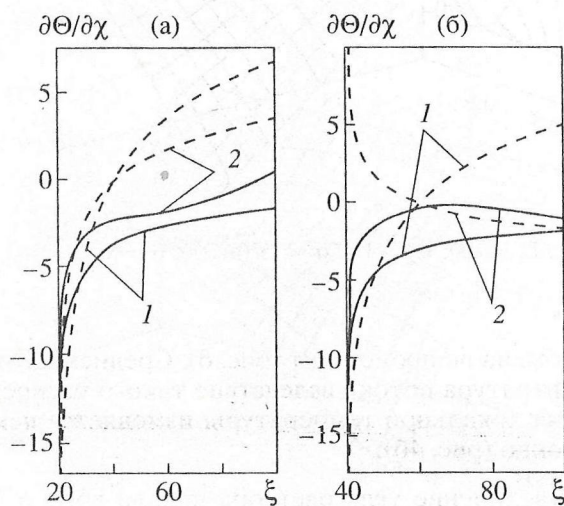


Рис. 9. Распределение $\partial\Theta/\partial\chi$ на границах канала $\chi = 0$ (сплошные линии), $\chi = 1$ (пунктирные линии): (а) — $\xi_0 = 20$; $Pe = 2 \times 10^4$ (1, 2); $\alpha = 15$ (1), 90 (2) град.; $b = 0.05$ (1, 2); $\Theta_2 = -1.5$ (1, 2); (б) — $\xi_0 = 40$; $Pe = 2 \times 10^4$ (1), 2×10^3 (2); $\alpha = 15$ (1, 2) град.; $b = 0.05$ (1), -0.03 (2); $\Theta_2 = -1.5$ (1), 1.5 (2).

ничный слой не успевает распространиться в глубь течения даже у внутренней поверхности канала с более сильным изменением температуры, чем в ранее рассмотренных случаях (рис. 6в). Изменение среднемассовой температуры в пределах канала также незначительно (рис. 4б), а безразмерные тепловые потоки не достигают предельных значений (рис. 3б). При $\alpha = 90^\circ$ тепловой слой распространяется на все сечение канала (рис. 6г). Максимальное изменение температуры в канале увеличивается в два раза по сравнению с преды-

дущим случаем (рис. 4б), но тепловые потоки на границах не достигают предельных значений (рис. 3б).

Теплообмен при $\Theta_2 < 0$, $b > 0$ соответствует либо течению с температурой внешней стенки канала, поддерживаемой ниже T_0 , а температура внутренней стенки вдоль течения уменьшается от $T_2 > T_0$, либо течению при температуре внешней стенки канала большей, чем T_0 , а температура внутренней стенки увеличивается от $T_2 < T_0$.

Для течения с параметрами $Pe = 2 \times 10^4$, $\Theta_2 = -1.5$, $b = 0.05$, $\alpha = 15^\circ$, $\xi_0 = 20$, $\Delta\xi = 80$ безразмерная температура жидкости увеличивается вблизи внешней стенки ($\chi = 0$) и уменьшается вблизи внутренней ($\chi = 1$) (рис. 7а). Поскольку вблизи входа безразмерная температура внутренней стенки по абсолютной величине больше 1, то безразмерная среднемассовая температура незначительно уменьшается в начале канала (рис. 8а). Здесь же наблюдаются наибольшие тепловые потоки на стенках (рис. 9а). Далее вдоль течения безразмерная температура внутренней стенки канала увеличивается и на некотором расстоянии становится больше, чем безразмерная температура прилегающей жидкости, т.е. в этом месте тепловой поток на внутренней стенке меняет знак (рис. 9а). Безразмерная среднемассовая температура равномерно увеличивается с ростом безразмерной температуры внутренней стенки (рис. 8а), но стабилизация теплообмена в пределах канала не происходит.

При большем угле раскрытия диффузора тепловой пограничный слой на меньшем расстоянии от входа распространяется на все сечение канала. Безразмерная температура потока отличается от безразмерной температуры стенок канала на меньшую величину, чем в предыдущем случае, что ведет к меньшим тепловым потокам на границах (рис. 9а). В данном случае тепловые потоки меняют свое направление на обеих границах канала (рис. 9а): на внутренней границе благодаря тому, что безразмерная температура стенки на некотором расстоянии начинает превышать безразмерную температуру набегающей жидкости, а на внешней — потому, что безразмерная температура потока жидкости, вследствие теплообмена с внутренней стенкой, становится больше температуры внешней стенки канала.

Изменение параметра ξ_0 (координаты входа в канал) также оказывает большое влияние на характеристики теплообмена. Увеличение ξ_0 при постоянном α приводит к увеличению площади поперечного сечения канала и поверхности теплообмена, т.е. при постоянном числе Pe тепловой пограничный слой распространяется на все поперечное сечение канала на меньшем расстоянии от входа, чем при тех же параметрах, но с меньшим ξ_0 (рис. 7в). Характер изменения безразмерной

среднемассовой температуры и тепловых потоков остается практически прежним (рис. 8б, 9б).

Уменьшение числа Re с одновременным увеличением ξ_0 приводит к развитию поля температуры на малом расстоянии от входа. Это хорошо видно для параметров $Re = 2 \times 10^3$, $\Theta = 1.5$, $b = -0.03$, $\alpha = 15^\circ$, $\xi_0 = 40$ (рис. 7г) (см. также рис. 6а). В этом случае распределения среднемассовой температуры и тепловых потоков на границах описываются в пределах канала предельными зависимостями (рис. 8б, 9б).

В заключение отметим, что функциональные ряды (45), (46) равномерно сходятся для $\xi > \xi_0$ при любых параметрах задачи, удовлетворяющих принятым ограничениям [11]. Анализ выражений (49)–(51) и численное суммирование рядов (45), (46) и (58), (59) показывает, что при определении собственных значений μ_{in} и вычислении вырожденных гипергеометрических функций с относительной погрешностью 10^{-16} члены функциональных последовательностей частичных сумм указанных рядов, начиная с $n \approx \text{INT}[\sqrt{Pe}/(\xi - \xi_0)^2]$, отличаются друг от друга не более чем на 0.01%. С этой относительной погрешностью и вычисляли суммы рядов (45), (46) и (58), (59). Точность расчета может быть проверена с помощью закона сохранения энергии

$$\begin{aligned} & c\rho Q(\Delta\bar{T} - T_0) = \\ & = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} [(q_1 - q_2)R \sin \alpha + hq_2 \cos \alpha] dR, \end{aligned} \quad (62)$$

где q_1, q_2 – тепловые потоки на границах канала $\chi = 0$ и $\chi = 1$ соответственно. В безразмерном виде (62) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} Re\bar{\Theta} = 2 \left\{ \int_{\xi_0}^{\xi} \left[\xi \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \right)_{\chi=1} - \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} \right] \sin \alpha - \right. \\ \left. - \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} \cos \alpha \right] d\xi \Big\}. \end{aligned} \quad (63)$$

Расчеты показывают, что правая и левая части (63) совпадают с точностью, с которой выполняются вычисления.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

a – коэффициент температуропроводности;
 b – линейный коэффициент изменения температуры внутренней поверхности канала;
 c – удельная теплоемкость, Дж/(кг К);
 h – ширина канала, м;
 L – длина конической части канала, м;
 P, P_0 – давление соответственно текущее и на входе, Па;
 Q – расход, м³/с;

R, R_0, R_1 – радиальная координата соответственно текущая, входа в диффузор и выхода, м;

T, T_0 – температура соответственно текущая и на входе в канал, К;

T_1 – температура границы, образованной внешним конусом, К;

T_2, T_3 – температура границы, образованной внутренним конусом соответственно на входе в канал и выходе, К;

V, V_0 – скорость соответственно текущая и на входе в канал, м/с;

X – поперечная биконическая координата, м;

x', y', z' – декартовы координаты, м;

α – половина угла раскрытия конуса, град.;

α_1, α_2 – коэффициент теплоотдачи на границе $\chi = 0, \chi = 1$ соответственно, Вт/(м² К);

β – постоянная разделения;

λ – теплопроводность жидкости, Вт/(м К);

ν – динамический коэффициент вязкости, Па с;

ρ – плотность, кг/м³;

$Gn = \nu V_0^2 / (\lambda \Delta T_{\text{reol}})$ – число Нема–Гриффита;

$Re_0 = V_0 h c \rho / \lambda$ – число Пекле на входе в канал;

$Re = h V_0 \rho / \nu$ – число Рейнольдса;

INT – функция усечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Joshi M.V.* Dies for Plastics Extrusion. Delhi: Macmillan. India Limited, 1984. P. 176.
2. *Sors L., Bardocz L., Radnoti I.* Plastic Molds and Dies. Budapest: Akad. Kiado, 1980. P. 495.
3. *Ульев Л.М.* Медленные течения между соосными коническими поверхностями // Инж.-физ. журн. 1998. Т. 71. № 6. С. 1092.
4. *Ульев Л.М.* Медленные течения в коаксиальных конических каналах // Вестн. Харьков. политехн. ун-та. 1997. Вып. 7. Ч. 2. Механика. Машиностроение. С. 22.
5. *Ульев Л.М.* Теплообмен при медленном диффузорном течении жидкости в коаксиальных конических каналах // Теор. основы хим. технол. 2000. Т. 34. № 1. С. 16.
6. *Ульев Л.М.* Неизотермическое течение расплавов термопластичных полимеров в коническо-цилиндрических фильерах // Теор. основы хим. технол. 1996. Т. 30. № 6. С. 583.
7. *Пономаренко В.Г., Потеня Г.Ф., Ульев Л.М. и др.* // Определение реологических свойств высоковязких жидкостей с помощью автоматического капиллярного вискозиметра // Инж.-физ. журн. 1990. Т. 59. № 1. С. 158.
8. *Тадмор З., Гогос К.* Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия, 1984. С. 632.
9. *Гольдин А.М., Карамзин В.А.* Гидродинамические основы процессов тонкослойного сепарирования. М.: Агропромиздат, 1985. С. 264.
10. *Лыков А.В.* Теплообмен. М.: Энергия, 1972. С. 560.
11. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. С. 408.