



**ВЕСТНИК  
НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
«ХПИ»**

**3'2002**

**Харьков**

УДК 532.58: 678.027  
МЕДЛЕННЫЕ КОНФУЗОРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ  
В СООСНЫХ КОНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ  
ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

Л.М. Ульев

The problem of slow flow for Newtonian liquid in the coaxial conic channels with variable width along the flow had been solved. The handy dependences for pressure drop and velocity distribution were received.

Введение

При создании оборудования для переработки высоковязких жидкостей часто приходится рассчитывать течения в соосных конических каналах, например, в каналах формующего оборудования экструзионных машин.

В работах [1, 2] автором решена гидродинамическая задача медленного диффузорного течения в каналах между соосными круглыми коническими поверхностями с общей вершиной и между эквидистантными коническими поверхностями. Там же предложено решение задачи диффузорного течения в коаксиальных конических щелях переменной ширины с помощью ступенчатой аппроксимации рассматриваемого канала коническими каналами постоянной ширины. Но при непрерывном и достаточно плавном изменении ширины канала вдоль течения, можно получить аналитическое решение гидродинамической задачи. В работе [3] такое решение получено для диффузорного течения. В данной работе мы будем исследовать медленные конфузорные течения в соосных конических каналах с линейно изменяющейся шириной канала вдоль течения.

Математическая постановка задачи и ее решение

Также как и в работах [1-3], рассматривать течение будем в биконических координатах (рис. 1), определяемых преобразованием [4]

$$z' = R \cos \alpha + X \sin \alpha, \quad (1)$$

$$y' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \sin \phi = \Omega \sin \phi, \quad (2)$$

$$x = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \cos \phi = \Omega \cos \phi. \quad (3)$$

В работе [5] показано, что в практически важных случаях течения выполняется условие  $\xi > 2.22 \operatorname{ctg} \alpha$ , что позволяет пренебречь влиянием кривизны границ канала на течение и, принимая во внимание оценки, сделанные в [1, 2], записать уравнение

движения для конфузорного течения в соосном коническом канале переменной ширины (рис. 2) в безразмерных величинах  $s = \xi_1 - \xi$ ,  $\xi = \frac{R}{h_0}$ ,  $\chi = \frac{X}{h_0}$ ,

$$V_0 = \frac{Q}{\pi h_0^2 (2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)}, \quad v = \frac{V}{V_0}, \quad \Pi = \frac{(P - P_0) h_0}{\mu V_0} \quad \text{как:}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s} = \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}. \quad (4)$$

Уравнение неразрывности учтем в виде постоянства расхода жидкости через любое поперечное сечение канала:

$$\int_0^{1+as} [(\xi_1 - s) \sin \alpha - \chi \cos \alpha] v d\chi = \frac{1}{2} (2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha). \quad (5)$$

Граничными и краевыми условиями являются, условие прилипания на стенках канала и нулевая величина безразмерного давления на входе в канал:

$$v = 0, \quad \chi = 0, \quad (6)$$

$$v = 0, \quad \chi = 1 + as, \quad (7)$$

$$\Pi = 0, \quad s = 0. \quad (8)$$

Параметр "а" является тангенсом разности полууглов раскрытия внутренней и внешней поверхности канала (рис. 2), т.е.

$a = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha)$ , и тогда из геометрических соображений величина параметра "а" должна удовлетворять условию (рис. 2):

$$\xi_0 \operatorname{tg} \alpha \geq 1 + (\xi_1 - \xi_0) a \geq 0. \quad (9)$$

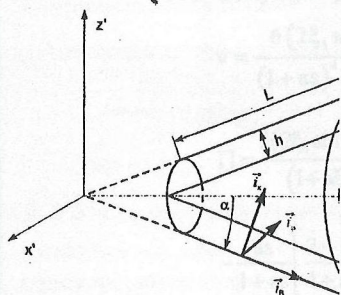


Рисунок 1. Связь биконической системы с геометрией канала: L – длина конического канала, м; h – ширина зазора, м;  $i_x$ ,  $i_y$ , биконической системе координат

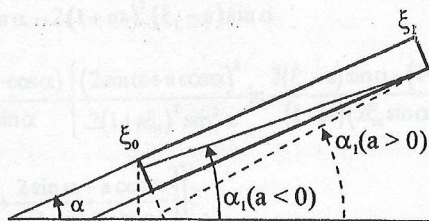


Рисунок 2. Геометрия канала с изменяющейся шириной вдоль течения

Решение (4) с условиями (6) и (7) имеет вид:

$$v = \frac{1}{2} \frac{d\Pi}{ds} [\chi^2 - (1+as)\chi]. \quad (10)$$

Из (5) и (10) получаем выражение для определения градиента давления:

$$\frac{d\Pi}{ds} = \frac{12(2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)}{(1+as)^4 \cos \alpha - 2(1+as)^3 (\xi_1 - s) \sin \alpha}. \quad (11)$$

Безразмерная площадь поверхности поперечного сечения соосного конического канала переменной ширины определится выражением:

$$\bar{S} = \frac{2\pi h_0^2 \int_0^{h_0(1+as)} [(\xi_1 - s) \sin \alpha - \chi \cos \alpha] d\chi}{\pi h_0^2 (2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)} = \frac{(1+as) [2(\xi_1 - s) \sin \alpha - (1+as) \cos \alpha]}{2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha}, \quad (12)$$

а средняя по поперечному сечению канала безразмерная скорость определится как:

$$\bar{v} = \frac{Q}{SV_0} = \frac{1}{\bar{S}}. \quad (13)$$

Сравнивая (13) и (11) последнее можно записать в более компактном и наглядном виде:

$$\frac{d\Pi}{ds} = - \frac{12\bar{v}}{(1+as)^2}. \quad (11a)$$

Далее, подставляя (11) в (10) и выполняя интегрирование в (11) получим решение задачи (4) - (8):

$$v = \frac{6(2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha) [\chi^2 - (1+as)\chi]}{(1+as)^4 \cos \alpha - 2(1+as)^3 (\xi_1 - s) \sin \alpha}, \quad (14)$$

$$\Pi = \frac{3(2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)}{(1+a\xi_1) \sin \alpha} \left\{ \frac{(2 \sin \alpha + a \cos \alpha)^2}{2(1+a\xi_1)^2 \sin^2 \alpha} \ln \frac{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - (1+as) \cos \alpha}{(1+as)(2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)} - \frac{as}{1+as} \left[ \frac{2+as}{1+as} + \frac{2 \sin \alpha + a \cos \alpha}{(1+a\xi_1) \sin \alpha} \right] \right\}. \quad (15)$$

Легко видеть, что, если в (13) - (15) положить  $a = 0$ , мы получим решение задачи медленного конфузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины [6]:

$$v = \frac{6(2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha) [\chi - \chi^2]}{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha}, \quad (16)$$

$$\Pi = \frac{6(2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)}{\sin \alpha} \ln \frac{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha}{2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha}, \quad (17)$$

$$\bar{v} = \frac{2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha}{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \cos \alpha}. \quad (18)$$

Если записать граничное условие (7) в виде:

$$v = 0, \quad \chi = \chi_{oi}, \quad (7a)$$

где  $\chi_{oi} = 1 + a s_i$ , а  $s_i = \frac{\xi_1 - \xi_0}{N}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $N$  - число

ступеней, то можно получить выражение для расчета безразмерного давления с помощью ступенчатой аппроксимации:

$$\Pi = \frac{6(2\xi_1 \sin \alpha - \cos \alpha)}{\sin \alpha} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\chi_{oi}^3} \ln \frac{2(\xi_1 - s) \sin \alpha - \chi_{oi} \cos \alpha}{2\xi_1 \sin \alpha - \chi_{oi} \cos \alpha}. \quad (19)$$

Очевидно, что выражение (12) в этом случае не изменится.

**Обсуждение результатов**

Рассмотрим основные закономерности и особенности конфузороного течения при различных значениях параметра "а" и произвольных углах  $\alpha$ .

Из выражений (13) и (12) видно, что при отрицательном значении "а" средняя безразмерная скорость жидкости  $\bar{v}$  при конфузороном течении будет увеличиваться вдоль канала. Для положительных значений параметра "а" функция  $\bar{v}(s)$  может иметь немонотонный характер изменения в пределах канала.

Действительно, из условия  $\frac{d\bar{v}}{ds} = 0$  получим значение координаты  $s$ , при которой площадь поперечного сечения канала имеет максимальную величину:

$$s_m = \frac{(a\xi_1 - 1) \sin \alpha - a \cos \alpha}{a(2 \sin \alpha + a \cos \alpha)}. \quad (20)$$

Очевидно, если  $s_m$  находится в пределах канала, т.е.  $0 < s < \xi_1 - \xi_0$ , то функция  $\bar{v}(s)$  - немонотонна. Для практически интересных геометрических размеров канала значение "а", как правило, удовлетворяет условию  $a < \operatorname{tg} \alpha$ , и тогда для  $s_m$  получаем

оценку ее величины  $s_m \approx \frac{1}{2} \left( \xi_1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$ , т.е. практически для

всех случаев  $s_m < 0.5\xi_1$ .

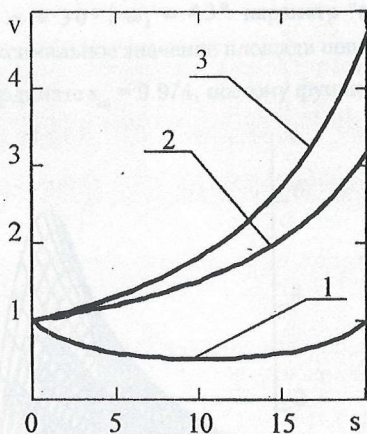


Рисунок 3. средняя безразмерная скорость жидкости вдоль течений: 1 – в канале при  $a = 0.231$ ; 2 – при  $a = 0$ ; 3 –  $a = -0.017$

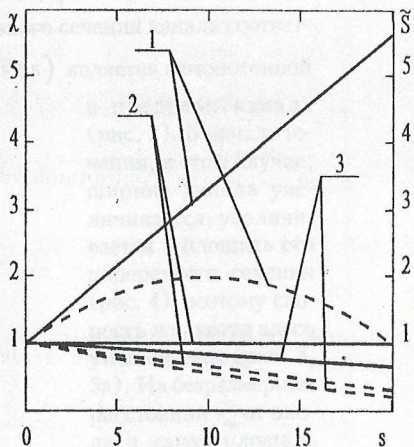


Рисунок 4. Изменение вдоль канала безразмерной ширины канала – сплошные линии и безразмерной площади поперечного сечения – шпировые линии 1 – для  $a=0.231$ ; 2 –  $a=0$ ; 3 –  $a=-0.017$

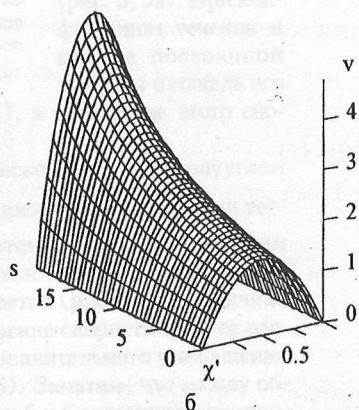
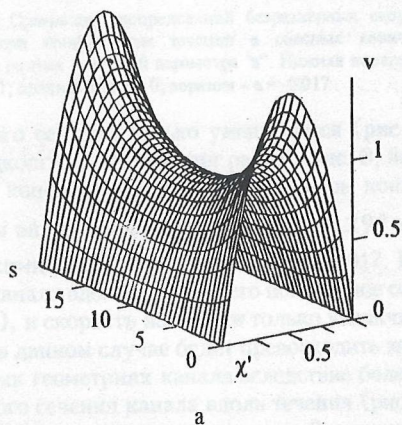


Рисунок 5. Распределение безразмерной скорости жидкости при конфузном течении в соосном коническом канале: а – с увеличивающейся шириной при  $a = 0.231$ ; б – в канале постоянной ширины ( $a = 0$ )

Для течения в соосном конфузоре с размерами (рис. 2)  $\xi_0 = 10$ ,  $\xi_1 = 30$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\alpha_1 = 43^\circ$  параметр "а"  $> 0$  и равен  $a = 0.231$ . В этом случае максимальное значение площади поперечного сечения канала соответствует координате  $s_m = 9.974$ , поэтому функция  $\bar{v}(s)$  является немонотонной

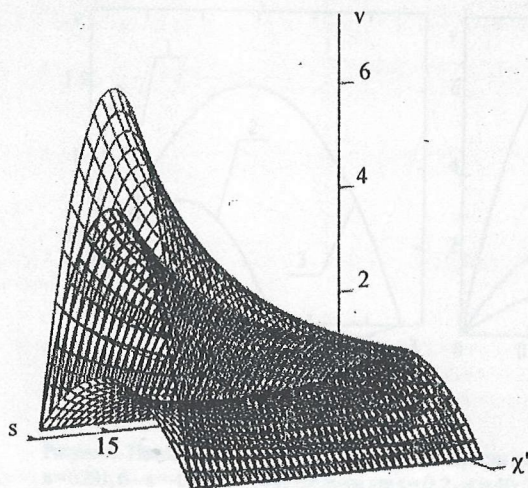


Рисунок 6. Сравнение распределений безразмерных скоростей жидкости при конфузорном течении в соосных конических каналах для разных значений параметра "а". Нижняя поверхность для  $a = 0.231$ ; средняя для  $a = 0$ ; верхняя -  $a = -0.017$

поперечного сечения только уменьшается (рис. 4), а вследствие этого скорость жидкости вдоль течения растет (рис. 3, 5б).

При конфузорном течении в соосном коническом канале с полууглом раскрытия внутренней поверхности  $\alpha_1 = 29^\circ$  и прежними остальными геометрическими размерами, параметр  $a = -0.017$ . В этом случае с уменьшением ширины канала вдоль течения, его поперечное сечение монотонно уменьшается (рис. 4), и скорость жидкости только увеличивается (рис. 3, 6). Величина скорости в данном случае будет превосходить значение скорости в ранее рассмотренных геометриях канала вследствие более значительного уменьшения поперечного сечения канала вдоль течения (рис. 6). Заметим, что между областями определения скорости на рис. 2 и рисунках 5 и 6 существует изоморфное соответствие, задаваемое преобразованием

$$s' = s, \quad \chi' = \frac{\chi}{1 + as} \quad (21)$$

в пределах канала (рис. 3). В начале течения, в этом случае, ширина канала увеличивается, увеличивается и площадь его поперечного сечения (рис. 4), поэтому скорость жидкости здесь уменьшается (рис. 3, 5а). На безразмерном расстоянии  $s_m$  от входа в канал площадь его поперечного сечения достигает максимальной величины, а средняя скорость — минимальной, и далее вдоль течения она будет увеличиваться (рис. 3, 5а). При конфузорном течении в канале постоянной ширины площадь его

Изменения в поперечном распределении скорости жидкости, соответствующие изменению ширины канала вдоль течения, показаны на рис. 7.

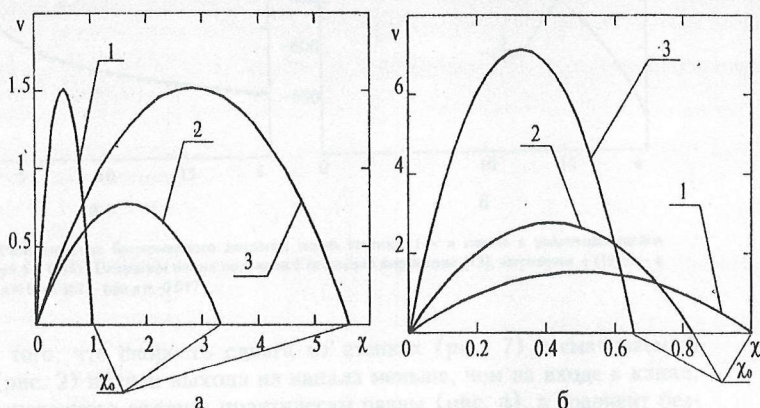


Рисунок 7. Изменение распределения безразмерной скорости вдоль канала: а — для течения в канале с  $a=0.231$ ; б —  $a=-0.017$ . 1 — распределение для  $s=0$ ; 2 —  $s=10$ ; 3 —  $s=20$ .  $x_0$  — координата внутренней границы канала

Модуль градиента давления  $\left| \frac{d\Pi}{ds} \right|$  при течении в канале постоянной

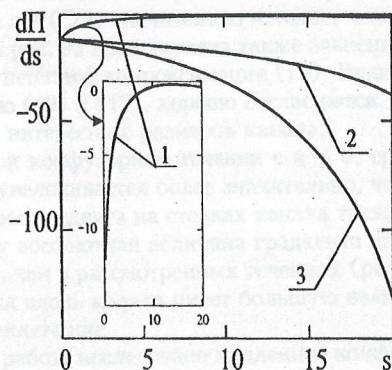


Рисунок 8. Распределение безразмерного градиента давления вдоль течения: 1 — в канале с  $a=0.231$ ; 2 —  $a=0$ ; 3 —  $a=-0.017$

ширины увеличивается вдоль течения вследствие увеличения скорости (11а) (рис. 8). В случае течения с увеличивающейся шириной канала при  $a=0.231$ , модуль градиента давления в начале канала с уменьшением скорости течения уменьшается (рис. 8), но вблизи выхода из канала возрастает из-за увеличения средней скорости жидкости. Однако, несмотря на то, что средние скорости течения жидкости на входе в канал и выходе из него практически равны (рис. 3), абсолютная величина градиента давления на выходе из канала значительно меньше, чем на входе в него (рис. 8). Это происходит



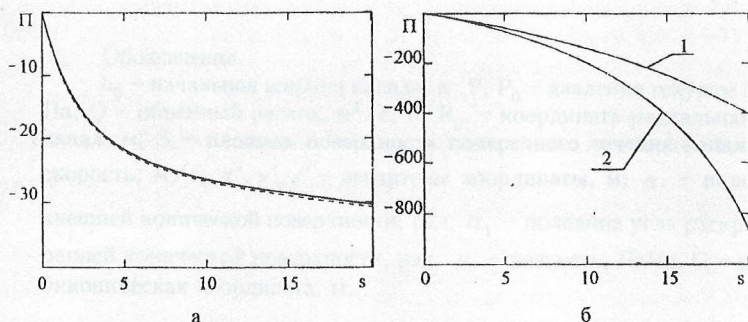


Рисунок 9. Распределение безразмерного давления вдоль течения: 1 – в канале с увеличивающейся шириной при  $a = 0.231$ . Сплошная линия получена с помощью выражения (13), штриховая – (19); б – в канале при  $a = 0$  – 1 и 2 – при  $a = -0.017$

вследствие того, что скорость сдвига на стенках (рис. 7) и смачиваемый периметр (рис. 2) вблизи выхода из канала меньше, чем на входе в канал, площади поперечного сечения практически равны (рис. 4), а градиент без-

размерного давления можно оценить как  $\frac{d\Pi}{ds} \sim - \left. \frac{dv}{d\chi} \right|_{\chi=0} \frac{Per}{S}$ , где смачиваемый периметр

$$Per = 2\pi \{ 2(\xi_1 - s) \sin \alpha - (1 + bs) \cos \alpha \}.$$

При течении в канале с увеличивающейся шириной абсолютная величина градиента давления на протяжении всего канала меньше, чем при течении в канале постоянной ширины. Поэтому и падение давления вдоль течения в случае с  $a = 0.231$  значительно меньше, чем при  $a = 0$  (рис. 9).

На рис. 9а представлена также зависимость  $\Pi(s)$ , рассчитанная с помощью ступенчатой аппроксимации (19). Видно, что результаты, полученные с помощью (19) и (15), хорошо согласуются. Это наблюдается для всех практически интересных размеров канала.

При конфузурном течении с  $a < 0$ , средняя скорость жидкости вдоль канала увеличивается более значительно, чем в ранее рассмотренных случаях, скорость сдвига на стенках канала также будет иметь большее значение. Поэтому абсолютная величина градиента давления здесь растет более существенно, чем в рассмотренных течениях (рис. 8). Вследствие этого и перепад давления вдоль канала имеет большую величину (рис. 9б).

#### Заключение

В работе исследовано медленное конфузурное течение в соосных конических каналах. Получены удобные аналитические выражения для расчета перепада давления и распределения скорости в таких каналах.

#### Обозначения

$h_0$  – начальная ширина канала, м;  $P, P_0$  – давление текущее и на входе, Па;  $Q$  – объёмный расход,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $R, R_0$  – радиальная координата и входа в канал, м;  $S$  – площадь поверхности поперечного сечения канала,  $\text{м}^2$ ;  $V$  – скорость, м/с;  $x', y', z'$  – декартовы координаты, м;  $\alpha$  – половина угла внешней конической поверхности, рад;  $\alpha_1$  – половина угла раскрытия внутренней конической поверхности, рад;  $\mu$  – вязкость, ПаЧс;  $C$  – поперечная биконическая координата, м.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Ульев Л. М. Медленные течения между соосными коническими поверхностями // ИФЖ. 1998. Т. 71, №. 6. С. 1092- 1098.
2. Ульев Л. М. Медленные течения в коаксиальных конических каналах // Вестник ХГПУ. Механика. Машиностроение. Харьков, ХГПУ. 1997. Вып. 7. Ч. 2. С. 22-31.
3. Ульев Л. М. Медленные течения в коаксиальных конических щелях переменной ширины // Вестник ХГПУ. 1999. Вып. 34. С. 3-8.
4. Гольдин А. М., Карамзин В. А. Гидродинамические основы процессов тонкослойного сепарирования. М.: Агропромиздат, 1985. С. 264.
5. Ульев Л. М. Влияние кривизны границ на ламинарное установившееся течение в кольцевом коническом канале постоянной ширины // ITE. 2001. № 1. С. 34 – 44.
6. Ульев Л. М. Теплообмен при медленном течении в коаксиальных конических конфузорах для граничных условий первого рода // ITE. 1999. № 2. С. 40 – 52.