

**АВИАЦИОННО-КОСМИЧЕСКАЯ
ТЕХНИКА И ТЕХНОЛОГИЯ**

Выпуск 9

ХАРЬКОВ 1999

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
Государственный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»

**АВИАЦИОННО-КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА
И ТЕХНОЛОГИЯ**

Сборник научных трудов

Выпуск 9

Тепловые двигатели и энергоустановки

Харьков «ХАИ» 1999

УДК 536.24 (075)

ТЕПЛОБМЕН ПРИ МЕДЛЕННОМ ДИФFUЗОРНОМ ТЕЧЕНИИ В КОАКСИАЛЬНОМ КОНИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ ВНУТРЕННЕЙ СТЕНКИ КАНАЛА

Ульев Л.М., Харьков, Украина

При оптимизации многих современных технологических процессов возникает необходимость исследования конвективного теплообмена органических жидкостей в коаксиальных конических каналах. Экспериментальный подбор оптимальных характеристик требует значительных средств, построение численных моделей конвективного теплопереноса также не всегда оправдано, т.к. во многих случаях можно получить адекватные соотношения между параметрами процессов, используя аналитические решения. В дальнейшем эти решения могут служить основой для разработки численных,

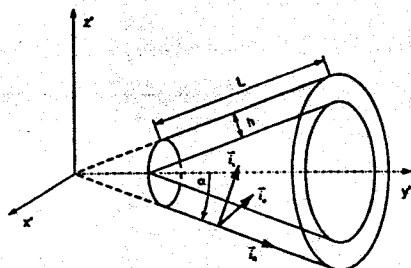


Рис. 1. Геометрия конического зазора постоянной ширины, L - длина конической части канала, h - ширина зазора, m ; l_x , l_y , l_z - орты в биконической системе координат

асимптотических и приближенных методов расчета.

Автором в работах [1-3] решена задача изотермического течения в коаксиальных конических каналах с различным расположением граничных поверхностей. В [4,5] исследован конвективный теплообмен при медленном диффузорном течении в конических зазорах при граничных условиях третьего рода, а в [6,7] - при симметричных и антисимметричных граничных условиях первого рода.

Течение органических жидкостей, как правило, происходит с малыми значениями чисел Рейнольдса $Re < 1$ и большими значениями чисел Пекле $Pe > 100$, поэтому в данной работе течение жидкости будем рассматривать как ползущее аксиально-симметричное течение, а в уравнении теплопереноса не будем учитывать изменение кондуктивного теплового потока вдоль течения. Кроме того, в большинстве случаев течения через конические зазоры распределительных устройств числа Нема - Гриффита $Sn \ll 1$, что позволяет пренебречь теплотой диссипации и решать несопряженную задачу конвективного теплообмена.

Запишем систему уравнений аксиально-симметричного конвективного теплообмена в биконической системе координат (рис.1), определяемых преобразованием [8]:

$$z = R \cos \alpha + X \sin \alpha, \quad (1)$$

$$y = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \sin \varphi, \quad (2)$$

$$x = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \cos \varphi, \quad (3)$$

в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sigma \frac{\partial v}{\partial \chi} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} = \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sigma^2} v, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\sigma v) = 0, \quad (6)$$

$$P e_0 v \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \right); \quad (7)$$

где $\xi = R/h$, $\chi = X/h$, $V_0 = Q/\pi h(2R_0 \sin \alpha - h \cos \alpha)$, $v = V_R/V_0$, $\Pi = (P - P_0)h/\gamma V_0$, $\sigma = \xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha$, $Pe_0 = V_0 h/a$, $\Theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$, T_1 - температура поверхности канала, образованной внешним конусом.

Граничные и краевые условия запишутся в виде:

$$v = 0, \quad \chi = 0, \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1, \quad (8)$$

$$v = 0, \quad \chi = 1, \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1, \quad (9)$$

$$\Pi = 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad \xi = \xi_0, \quad (10)$$

$$\Theta = 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad \xi = \xi_0, \quad (11)$$

$$\Theta = 1, \quad \chi = 0, \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1, \quad (12)$$

$$\Theta = \Theta_2 + b(\xi - \xi_0), \quad \chi = 1, \quad \xi_0 < \xi \leq \xi_1, \quad (13)$$

$$\text{где } b = \frac{T_3 - T_2}{(T_1 - T_0) \Delta \xi}, \quad \Delta \xi = \xi_1 - \xi_0 = L/h.$$

Для практически важных случаев, когда $\xi \operatorname{tg} \alpha \gg 1$, решение системы уравнений (4)-(6), (8)-(10) в принятых обозначениях имеет вид [1]:

$$v = \frac{6(2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)}{\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha} (\chi^2 - \chi), \quad (14)$$

$$\Pi = \frac{6(\cos \alpha - 2\xi_0 \sin \alpha)}{\sin \alpha} \ln \frac{1 - 2\xi \operatorname{tg} \alpha}{1 - 2\xi_0 \operatorname{tg} \alpha}, \quad (15)$$

и тогда уравнение (7) примет вид:

$$\frac{6Pc_0(2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)}{\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha} (\chi^2 - \chi) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \chi^2}. \quad (16)$$

Для того, чтобы получить решение задачи (16), (11)-(13), представим его в виде суперпозиции двух решений:

$$\Theta(\chi, t) = \Xi_1(\chi, t) + \Xi_2(\chi, t), \quad (17)$$

где $t = (2\chi - 1)$, $\Xi_i(\xi, t)$ – решение уравнения (16) для граничных условий:

$$\Xi_1 = \frac{1 + \Theta_2 + b(\xi - \xi_0)}{2}, \quad t = -1, \quad (18)$$

$$\Xi_1 = \frac{1 + \Theta_2 + b(\xi - \xi_0)}{2}, \quad t = 1, \quad (19)$$

$$\Xi_1 = 0, \quad \xi = \xi_0, \quad -1 < t < 1, \quad (20)$$

а $\Xi_2(\xi, t)$ – решение (16) для условий:

$$\Xi_2 = \frac{1 - \Theta_2 - b(\xi - \xi_0)}{2}, \quad t = -1, \quad (21)$$

$$\Xi_2 = \frac{-1 + \Theta_2 + b(\xi - \xi_0)}{2}, \quad t = 1, \quad (22)$$

$$\Xi_2 = 0, \quad \xi = \xi_0, \quad -1 < t < 1. \quad (23)$$

Для решения задач (16), (18)-(20) и (16), (21)-(23) введем новые зависимые переменные, определяемые преобразованиями:

$$\Xi_1(\xi, t) = \Phi_1(\xi, t) + \frac{1 + \Theta_2 + b(\xi - \xi_0)}{2}, \quad (24)$$

$$\Xi_2(\xi, t) = \Phi_2(\xi, t) + \frac{\Theta_2 - 1 + b(\xi - \xi_0)}{2} t. \quad (25)$$

Функции $\Phi_i(\xi, t)$ (здесь и далее $i = 1, 2$ – индекс, введенный для краткости записи) преобразуют неоднородные граничные условия (18), (19), (21), (22) в однородные:

$$\Phi_1 = 0, \quad \chi = 0, \quad t = -1, \quad (26)$$

$$\Phi_1 = 0, \quad \chi = 1, \quad t = 1, \quad (27)$$

а условия на входе в канал (20), (23) преобразуются к виду:

$$\Phi_1(\xi_0, t) = -\frac{1 + \Theta_2}{2}, \quad (28)$$

$$\Phi_2(\xi_0, t) = \frac{1 - \Theta_2}{2} t. \quad (29)$$

Далее, подставляя функции $\Xi_i(\xi, t)$ в уравнение (16) и учитывая замену переменных, получим для $\Phi_i(\xi, t)$ неоднородные уравнения:

$$\frac{8(\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha)}{3\text{Pe}[(1-t^2)]} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi} + f_i(\xi, t) = 0, \quad (30)$$

где $\text{Pe} = \frac{Q}{\lambda a h}$, и тогда $\text{Pe}_0 = \frac{\text{Pe}}{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha}$, а для f_i из (24) и (25) следует, что $f_1(\xi, t) = b/2$, и $f_2(\xi, t) = b \cdot U/2$.

Представляя решение (30) в виде произведения $\Phi_i(\xi, t) = Y_i(\xi) \cdot \Psi_i(\chi)$ (по i суммирования нет) и рассматривая соответствующее (30) однородное уравнение, приходим к задаче Штурма-Лиувилля, которая определится системой уравнений:

$$\Psi_i'' + \mu_i^2(1-t^2)\Psi_i = 0, \quad (31)$$

$$\Psi_i = 0, \quad t = -1, \quad (32)$$

$$\Psi_i = 0, \quad t = 1, \quad (33)$$

где $\mu_i = \beta_i/4$, β_i — постоянная разделения для однородного уравнения (30).

В [4] показано, что уравнение (31) сводится к уравнению Уиттекера и имеет решение:

$$\Psi(t) = C_1 \sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu}{4}, \frac{3}{2}; \mu t^2\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\mu t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu}{4}, \frac{1}{2}; \mu t^2\right), \quad (34)$$

где ${}_1F_1(\alpha, \gamma; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Подставляя (34) в (32) и (33), получим:

$$-C_1 \sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu}{4}, \frac{3}{2}; \mu\right) + C_2 \sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu}{4}, \frac{1}{2}; \mu\right) = 0, \quad (35)$$

$$C_1 \sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu}{4}, \frac{3}{2}; \mu\right) + C_2 \sqrt{\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu}{4}, \frac{1}{2}; \mu\right) = 0. \quad (36)$$

Очевидно, что уравнения (35) и (36) совместны только, когда $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$. В первом случае уравнение для определения собственных значений имеет вид:

$${}_1F_1\left(\frac{1-\mu}{4}, \frac{1}{2}; \mu\right) = 0, \quad (37)$$

и собственными функциями задачи являются функции:

$$\Psi_{i_n} = C \exp\left(-\frac{\mu_{i_n} t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu_{i_n}}{4}, \frac{1}{2}; \mu_{i_n} t^2\right). \quad (38)$$

При $C_2 = 0$ собственные значения определяются из уравнения:

$${}_1F_1\left(\frac{3-\mu}{4}, \frac{3}{2}; \mu\right) = 0, \quad (39)$$

и тогда собственными функциями будут функции:

$$\Psi_{2n} = C \sqrt{\mu_{2n}} \exp\left(-\frac{\mu_{2n} t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu_{2n}}{4}, \frac{3}{2}; \mu_{2n} t^2\right). \quad (40)$$

Заметим, что значение μ_n можно с приемлемой для расчетов точностью вычислить, используя соотношение [9] $\mu_{1n} = 4n+5/3$, и, как показывают расчеты при $n > 2$, выполняется равенство $\mu_{2n} = \mu_{1n}+2$.

Используя (31)–(33), легко показать, что системы функций, определяемые равенствами (38) и (40), являются ортогональными с весом $(1-t^2)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Поэтому, источникный член в уравнении (30) мы можем представить в виде разложения по собственным векторам задачи (31)–(33):

$$f_i(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{in}(\xi) \Psi_{in}, \quad (41)$$

что позволяет, используя свойство ортогональности собственных функций, определить коэффициенты разложения $f_{in}(\xi)$:

$$f_{in} = \frac{\int_{-1}^1 (1-t^2) f_i(\xi, t) \Psi_{in}(t) dt}{\|\Psi_{in}\|}, \quad (42)$$

где $\|\Psi_{in}\| = \int_{-1}^1 (1-t^2) \Psi_{in}^2 dt$ - норма собственных функций.

Функция $(1-t^2)$ – четная на отрезке $[-1, 1]$, а $f_i(\xi)$ не зависит от t , и тогда, если выбрать в качестве базиса для решения задачи (16), (18)–(20) функции, определяемые соотношениями (39), (40) нечетные на этом отрезке, мы получим, что все $f_{in}(\xi) = 0$. Поэтому, в качестве ортогонального базиса в этом случае необходимо выбрать систему функций, определяемых соотношениями (37) и (38).

Аналогично для решения задачи (16), (21)–(23), где функция $f_{2n}(\xi, t)$ нечетная на отрезке $[-1, 1]$, в качестве базисных функций выберем нечетные функции (39), (40).

Следовательно (42), мы можем переписать в виде:

$$f_{1n} = \frac{b}{2} \frac{\int_{-1}^1 (1-t^2) \Psi_{1n}(t) dt}{\|\Psi_{1n}\|} = \frac{b}{2} M_n, \quad (43)$$

$$f_{2n} = \frac{b}{2} \frac{\int_{-1}^1 t(1-t^2) \Psi_{2n}(t) dt}{\|\Psi_{2n}\|} = \frac{b}{2} K_n. \quad (44)$$

Тем самым мы определили собственные функции поставленных задач. Следовательно, общие решения задач (16), (18)-(20) и (16), (21)-(23), являющиеся суммой соответствующих частных решений, примут вид:

$$\Phi_1(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{1n}(\xi) \exp\left(-\frac{\mu_{1n} t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1-\mu_{1n}}{2}, \frac{1}{2}; \mu_{1n} t^2\right), \quad (45)$$

$$\Phi_2(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n}(\xi) \exp\left(-\frac{\mu_{2n} t^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu_{2n}}{2}, \frac{3}{2}; \mu_{2n} t^2\right). \quad (46)$$

Далее подставляя функции Φ_1 и разложения (43), (44) в уравнение (30) и начальные условия, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $Y_m(\xi)$:

$$Y_m'' - \frac{8\mu_m^2}{3Pe} (\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha) Y_m + f_m = 0, \quad (47)$$

$$Y_m(\xi_0) = -\frac{\int \Phi_m(\xi_0, t) (1-t^2) \Psi_m(t) dt}{|\Psi_m|}. \quad (48)$$

Решения (47), (48) можно получить используя метод вариации произвольной постоянной, и записать в виде:

$$Y_{1n}(\xi) = -\frac{M_n}{2} \left\langle \frac{1+\Theta_2}{2} \exp\left\{\frac{8\mu_{1n}^2(\xi-\xi_0)(\cos \alpha - (\xi+\xi_0)\sin \alpha)}{3Pe}\right\} + \frac{b}{6Pe} I_{1n} \right\rangle, \quad (49)$$

$$Y_{2n}(\xi) = \frac{K_n}{2} \left\langle \frac{1-\Theta_2}{2} \exp\left\{\frac{8\mu_{2n}^2(\xi-\xi_0)(\cos \alpha - (\xi+\xi_0)\sin \alpha)}{3Pe}\right\} + \frac{b}{6Pe} I_{2n} \right\rangle, \quad (50)$$

$$\text{где } I_m = \int_{\xi_0}^{\xi} (\cos \alpha - 2\tau \sin \alpha) \exp\left\{\frac{8\mu_m^2(\xi-\tau)(\cos \alpha - (\xi+\tau)\sin \alpha)}{3Pe}\right\} d\tau. \quad (51)$$

Возвращаясь к исходным переменным, запишем решение задачи

$$\Theta(\xi, \chi) = 1 + [\Theta_2 - 1 + b(\xi - \xi_0)]\chi + \Phi_1(\xi, \chi) + \Phi_2(\xi, \chi), \quad (52)$$

с помощью которого вычислим среднemasовую температуру потока:

$$\bar{\Theta} = \frac{2\pi \int_0^1 \int_0^1 \Theta(\xi, \chi) (\xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha) d\chi}{\bar{v} \pi (2\xi \sin \alpha - \cos \alpha)} = \frac{12}{\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha} \int_0^1 (\chi^2 - \chi) \Theta(\xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha) d\chi, \quad (53)$$

$$\text{где } \bar{v} = \frac{2\xi \sin \alpha - \cos \alpha}{2\xi \sin \alpha - \cos \alpha} - \text{средняя безразмерная скорость.} \quad (54)$$

При определении безразмерных местных тепловых потоков на границах канала — чисел Нуссельта Nu традиционным способом, т.е. относя коэффициенты теплоотдачи к разности между среднemasсовой температурой потока и температурой стенки

$$Nu_1 = \frac{\alpha_1 h}{\lambda} = \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0}}{\Theta - \Theta_1}, \quad Nu_2 = \frac{\alpha_2 h}{\lambda} = -\frac{\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1}}{\Theta - \Theta_2}, \quad (55)$$

числа Nu_i могут иметь разрывы для значений координаты ξ , при которых среднemasсовая температура сравнивается с температурой одной из стенок. Это может произойти и в том случае, если коэффициент теплоотдачи отнести к разности между среднemasсовой температурой и средней температурой стенок, начальной или текущей. Поэтому, определим безразмерные коэффициенты теплоотдачи как отношение тепловых потоков на границах канала к масштабу обезразмеривания температуры:

$$Nu_i' = -\frac{\partial \Theta}{\partial n} \Big|_{n=0}, \quad (56)$$

где n — нормаль, направленная в сторону жидкости, и тогда получим сравнимые выражения, определяющие безразмерные тепловые потоки на границах канала

$$Nu_1' = -\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0}, \quad Nu_2' = \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1}. \quad (57)$$

Выполняя дифференцирование в (57), получим:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} = \Theta_2 - 1 + b(\xi - \xi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{1n} \Psi'_{1n} \Big|_{\chi=0} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n} \Psi'_{2n} \Big|_{\chi=0}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} = \Theta_2 - 1 + b(\xi - \xi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{1n} \Psi'_{1n} \Big|_{\chi=1} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n} \Psi'_{2n} \Big|_{\chi=1}, \quad (59)$$

$$\text{где } \Psi'_{1n} \Big|_{\chi=0} = -\Psi'_{1n} \Big|_{\chi=1} = 2\mu_{1n} \exp\left(-\frac{\mu_{1n}}{2}\right) \left[{}_1F_1\left(\frac{1-\mu_{1n}}{4}, \frac{1}{2}; \mu_{1n}\right) - (1-\mu_{1n}) {}_1F_1\left(\frac{5-\mu_{1n}}{4}, \frac{3}{2}; \mu_{1n}\right) \right],$$

$$\Psi'_{2n} \Big|_{\chi=0} = \Psi'_{2n} \Big|_{\chi=1} = 2\sqrt{\mu_{2n}} \exp\left(-\frac{\mu_{2n}}{2}\right) \left[(1-\mu_{2n}) {}_1F_1\left(\frac{3-\mu_{2n}}{4}, \frac{3}{2}; \mu_{2n}\right) + \frac{\mu_{2n}(3-\mu_{2n})}{3} {}_1F_1\left(\frac{7-\mu_{2n}}{4}, \frac{5}{2}; \mu_{2n}\right) \right].$$

Вследствие того, что выражения (57) полностью определяются производными от температуры на границах при анализе тепловых потоков на границах канала, мы будем использовать выражения (58) и (59).

Параметрами, определяющими решение задачи, являются: число Re , начальная безразмерная температура внутренней стенки Θ_2 , безразмерная координата входа в ка-

нал ξ_0 , угол раствора диффузора 2α и параметр b , определяющий распределение температуры поверхности внутренней стенки (границы канала при $\chi = 0$) вдоль канала.

Решение с параметрами $b > 0$ и $\Theta_2 = 0$ определяет особенности теплообмена при течении с начальной температурой внутренней поверхности канала T_2 , равной температуре жидкости на входе T_0 , и уменьшающейся вдоль канала до некоторой температуры $T_3 < T_2$ для условия $T_1 < T_0$, а для условия $T_1 > T_0$ увеличивающейся до температуры $T_3 > T_2$.

Решение при $b < 0$ и $\Theta_2 = 0$ соответствует течению в канале, внешняя стенка которого поддерживается при температуре меньше чем, температура жидкости на входе в канал $T_1 < T_0$, а температура внутренней стенки изменяется от T_0 до $T_3 > T_2$.

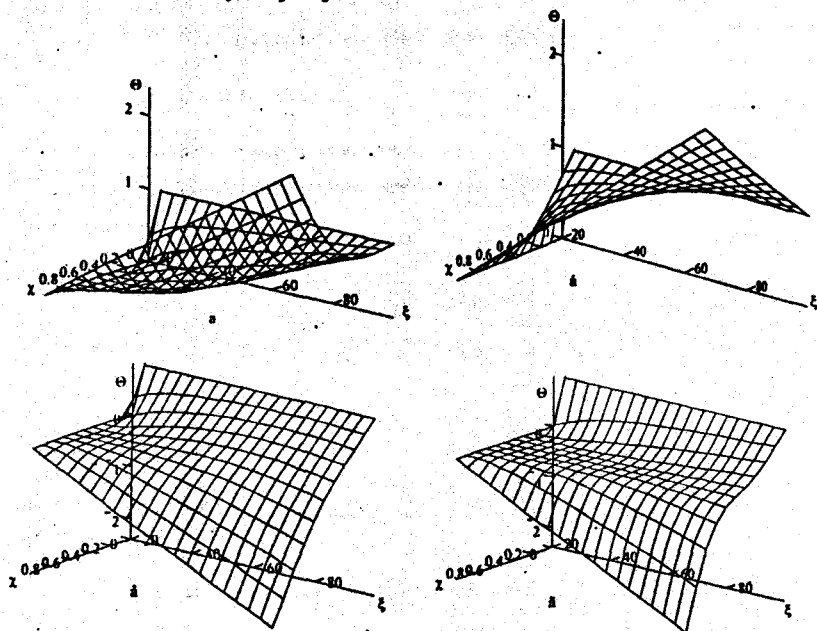


Рис. 2. Распределение безразмерной температуры в канале с параметрами $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 100$. а — для угла раскрытия $\alpha = 15^\circ$, числа $Re = 10^4$, $\Theta_2 = 0$ и $b = 0,03$; б — для $\alpha = 90^\circ$, $Re = 2 \cdot 10^4$, $\Theta_2 = 0$, $b = 0,03$; в — для $\alpha = 60^\circ$, $Re = 2 \cdot 10^4$, $\Theta_2 = 0$, $b = -0,03$; г — для $\alpha = 5^\circ$, $Re = 2 \cdot 10^4$, $\Theta_2 = 0$, $b = -0,03$

При теплообмене с $b > 0$ и $\Theta_2 = 0$ тепловой пограничный слой более интенсивно развивается у внешней стенки канала (рис. 2), здесь же наблюдаются наибольшее значение числа Nu_1^* (54), но по мере развития поля температур значения Nu_1^* уменьшается

(рис. 3). Число Nu_1 на внутренней границе канала вблизи входа в канал близко к 0, но увеличивается вместе с изменением температуры стенки (рис. 3). Среднемассовая температура потока для рассматриваемых значений Re и граничных условий монотонно растет вдоль течения, оставаясь при этом ниже температуры внутренней стенки (рис. 4).

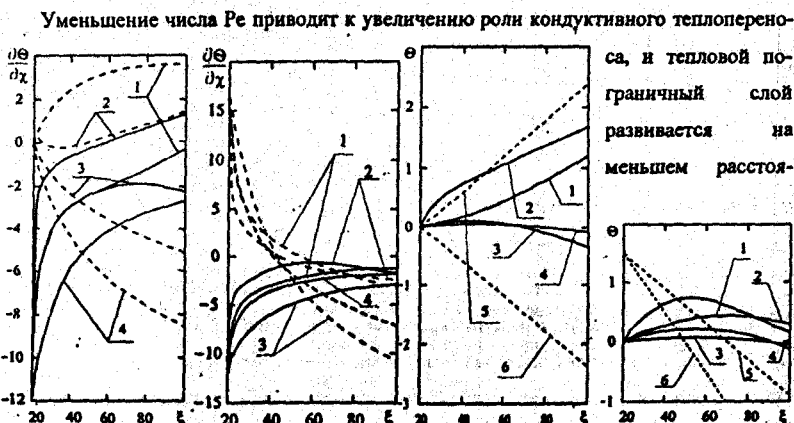


Рис. 3. Распределение безразмерного градиента температуры на границах канала. Сплошные линии на границе $\chi = 0$, штриховые — $\chi = 1$. а — течение при $\Theta_2 = 0$ и 1 — для $Re = 10^4$, $\alpha = 15^\circ$, $b = 0,03$; 2 — для $Re = 2 \cdot 10^3$, $\alpha = 90^\circ$, $b = 0,03$; 3 — для $Re = 2 \cdot 10^3$, $\alpha = 60^\circ$, $b = -0,03$; 4 — для $Re = 10^4$, $\alpha = 5^\circ$, $b = -0,03$. б — течение при $\Theta_2 = 1,5$ и 1 — для $Re = 10^4$, $\alpha = 15^\circ$, $b = -0,03$; 2 — для $Re = 10^4$, $\alpha = 90^\circ$, $b = -0,03$; 3 — для $Re = 7 \cdot 10^4$, $\alpha = 15^\circ$, $b = -0,05$; 4 — для $Re = 7 \cdot 10^4$, $\alpha = 90^\circ$, $b = -0,05$.

нии от входа в канал (рис. 2б). Безразмерный тепловой поток Nu_1 на внешней

стенке канала резко уменьшается с развитием теплового пограничного слоя вдоль течения и на некотором расстоянии от входа меняет знак (рис. 3). Это связано с тем, что безразмерная температура потока по всему поперечному сечению канала становится выше безразмерной температуры внешней границы канала за счет теплообмена с внутренней поверхностью, безразмерная температура которой увеличивается вдоль течения (рис. 2).

Тепловой поток Nu_1 на внутренней стенке канала вблизи входа несколько увеличивается вдоль течения вследствие возрастания температуры стенки, но из-за того, что на внешней стенке безразмерная температура вблизи входа значительно выше, чем на

Рис. 4. Распределение безразмерной среднемассовой температуры вдоль канала. а — течение при $\Theta_2 = 0$ и 1 — для $Re = 10^4$, $\alpha = 15^\circ$, $b = 0,03$; 2 — для $Re = 2 \cdot 10^3$, $\alpha = 90^\circ$, $b = 0,03$; 3 — для $Re = 2 \cdot 10^3$, $\alpha = 60^\circ$, $b = -0,03$; 4 — для $Re = 10^4$, $\alpha = 5^\circ$, $b = -0,03$; 5 — безразмерная температура внутренней поверхности канала ($\chi = 1$) при $b = 0,03$; 6 — при $b = -0,03$. б — течение при $\Theta_2 = 1,5$ и 1 — для $Re = 10^4$, $\alpha = 15^\circ$, $b = -0,03$; 2 — для $Re = 10^4$, $\alpha = 90^\circ$, $b = -0,03$; 3 — для $Re = 7 \cdot 10^4$, $\alpha = 15^\circ$, $b = -0,05$; 4 — для $Re = 7 \cdot 10^4$, $\alpha = 90^\circ$, $b = -0,05$; 5 — безразмерная температура внутренней поверхности канала ($\chi = 1$) при $b = -0,03$; 6 — при $b = -0,05$.

внутренней, а тепловой пограничный слой, при данных значениях числа Re , быстро распространяется на все поперечное сечение канала, безразмерная температура потока вблизи внутренней стенки становится выше безразмерной температуры стенки, и тепловой поток Nu_1 меняет знак. Это означает, что характер теплообмена на внешней и внутренней стенках на этом расстоянии становится разным, т.е. если жидкость нагревается от внешней стенки канала, то на внутренней она начинает охлаждаться и наоборот. При дальнейшем течении безразмерная температура внутренней стенки становится выше безразмерной температуры потока прилегающей жидкости, и тепловой поток вновь изменяет направление (рис. 3). Затем распределение температуры для любого поперечного сечения канала становится практически линейным (рис. 2), т.е. в разложениях (56) и (57) при увеличении ξ остается значимым только линейный член, и мы можем записать для предельных значений Nu_1^* и Nu_2^* :

$$Nu_{1,2}^* = -Nu_{1,2} = \Theta_2 - 1 + b(\xi - \xi_0). \quad (60)$$

Безразмерная среднемассовая температура потока жидкости вблизи входа увеличивается в большей мере за счет теплообмена с внешней стенкой канала, из-за чего ее значение превосходит значение безразмерной температуры внутренней стенки на этом участке. Но, вследствие увеличения безразмерной температуры внутренней стенки вдоль течения, на некотором расстоянии от входа температуры выравниваются, и в дальнейшем изменение температуры потока будет происходить за счет теплообмена с внутренней стенкой, безразмерная температура которой становится больше как безразмерной среднемассовой температуры, так и безразмерной температуры внешней стенки. Вследствие этого значение безразмерной среднемассовой температуры жидкости при дальнейшем течении превосходит значение безразмерной температуры внешней стенки (рис. 4).

Зависимость чисел Нуссельта, определенных традиционным способом (53), от ξ в точках, где среднемассовая температура жидкости сравнивается с температурами стенок, будет иметь разрыв (рис. 5), хотя особенностей распределения температуры в потоке здесь не наблюдается, поэтому для анализа конвективного теплообмена в каналах, поперечное сечение которых является многосвязной областью, по-видимому, лучше использовать для определения безразмерного теплового потока выражения (57).

Но при дальнейшем течении числа Nu_1 и Nu_2 стремятся к своему предельному значению $Nu_{1,2}^* = Nu_{1,2} = 2$ (рис. 5). Заметим, что Nu_1 стремится к 2 снизу, а Nu_2 — сверху для всех вариантов теплообмена исследованных в данной работе.

Существование предельных чисел Нуссельта говорит о том, что при увеличении

параметра $\frac{8(\xi - \xi_0) \cdot \cos \alpha - (\xi - \xi_0) \cdot \sin \alpha}{3Re}$, и, в частности, увеличение ξ , изменение

тепловых потоков на границах канала пропорционально изменению соответствующих разностей между температурами стенок и среднemasсовой температурой жидкости, что свидетельствует о стабилизации теплообмена. Сравнивая выражения (53), (58) и учитывая значения Nu_m , мы можем записать для стабилизированного теплообмена:

$$\overline{\Theta}_m = \frac{1 + \Theta_2}{2} + \frac{b}{2} (\xi - \xi_0). \quad (61)$$

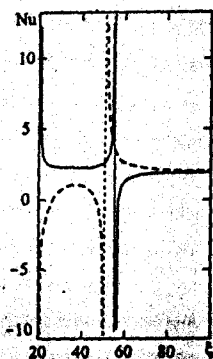


Рис. 5. Распределение чисел Нуссельта вдоль канала для течения с параметрами для $Re = 2 \cdot 10^4$, $\alpha = 90^\circ$, $b = 0,03$ и $\Theta_2 = 0$. Сплошная линия для Nu_1 , число Нуссельта на границе $\chi = 0$, пунктирная — для Nu_2 .

Рассмотрим теплообмен для параметров $b < 0$, $\xi_0 = 20$,

$\xi_1 = 100$, $\Theta_2 = 0$, $Re = 2 \cdot 10^4$ и с углом раскрытия канала $2\alpha = 120^\circ$.

Безразмерная температура жидкости у внешней стенки канала повышается более значительно, чем снижается у внутренней стенки, благодаря чему среднemasсовая температура жидкости в начале канала несколько увеличивается, но по мере снижения безразмерной температуры внутренней стенки начинает уменьшаться (рис. 4).

Тепловой поток по внешней стенке канала Nu_1^* (53) является немонойтонной функцией продольной координаты.

Сначала он уменьшается по мере развития теплового пограничного слоя, достигает своего минимального значения и далее, при установлении линейного распределения температуры в канале, начинает увеличиваться по зависимости (60). Тепловой поток на внутренней стенке Nu_2^* монотонно возрастает по абсолютной величине вследствие изменения температуры стенки (рис. 3).

При уменьшении угла раскрытия канала до $\alpha = 5^\circ$ и прежних значениях остальных параметров тепловой пограничный слой не успевает распространиться на все поперечное сечение канала. Это происходит как за счет увеличения скорости течения жидкости в канале, которая при постоянном Re увеличивается по гиперболическому закону при уменьшении α (54), так и из-за уменьшения поверхности теплообмена. Поэтому безразмерный тепловой поток Nu_1^* монотонно уменьшается, а Nu_2^* увеличивается по абсолютной величине в пределах канала (рис. 3). Изменения среднemasсовой температуры также незначительны (рис. 3). Теплообмен с Θ_2 и $b < 0$ при $T_1 < T_0$ соот-

ответствует течению расплава полимера в канале, когда вершина дорна охлаждается до температуры меньшей, чем температура поступающей жидкости, и далее температура его поверхности увеличивается. А при $T_1 > T_0$ вершина дорна имеет температуру выше температуры расплава, и вдоль канала температура поверхности дорна снижается.

Для теплообмена с параметрами $Pe=10^4$, $\Theta_2=1.5$; $b=-0.03$, $\xi_0=20$, $\alpha=15^\circ$ течение происходит на начальном тепловом участке, о чем говорит как неустановившийся характер распределения температуры в потоке (рис. 6), так и изменение тепловых потоков на границах (рис. 36). Безразмерная температура увеличивается на периферии потока практически одинаково у обеих границ в начале канала, но по мере уменьшения безразмерной температуры внутренней поверхности канала, безразмерная температура теплового пограничного слоя у этой поверхности становится отрицательной следуя за температурой границы. Поперечное распределение температуры приближается к линейному, но в пределах канала стабилизации теплообмена не наступает при рассматриваемых параметрах (рис. 6). Среднемассовая температура потока вследствие такого распределения температуры имеет немонотонный характер изменения (рис. 46).

Увеличение угла раствора канала до $\alpha = 90^\circ$ при сохранении остальных параметров приводит, как показано ранее, к уменьшению средней скорости течения и увеличению поверхности теплообмена. Вследствие этого время пребывания жидкости в канале увеличивается, и тепловые пограничные слои у стенок канала распространяются на все поперечное сечение канала на более коротком расстоянии от входа (рис. 66). Максимальные значения среднемассовой безразмерной температуры здесь выше, чем при $\alpha = 15^\circ$ (рис. 46) и в пределах канала устанавливается линейное изменение температуры как поперек, так и вдоль течения. Поэтому безразмерные тепловые потоки на стенках достигают здесь своих предельных линейных зависимостей (60) (рис. 36):

Увеличение числа Пекле до значения $Pe = 7 \cdot 10^4$ приводит к увеличению роли конвективного теплопереноса в теплообмене и, как следствие, к увеличению длины начального теплового участка. Тепловой пограничный слой не успевает распространиться вглубь течения даже у внутренней поверхности канала с более сильным изменением температуры, чем в ранее рассмотренных случаях (рис. 6а). Изменение среднемассовой температуры также незначительно в пределах канала (рис. 46), а безразмерные тепловые потоки не достигают своих предельных зависимостей (рис. 36). При увеличении угла раскрытия диффузора $\alpha = 90^\circ$ тепловой слой распространяется на все сечение канала (рис. 6г), максимальное изменение температуры в канале увеличивается в два раза

по сравнению с предыдущим случаем (рис. 4б), но тепловые потоки на границах в этом случае не достигают предельных зависимостей (рис. 3б).

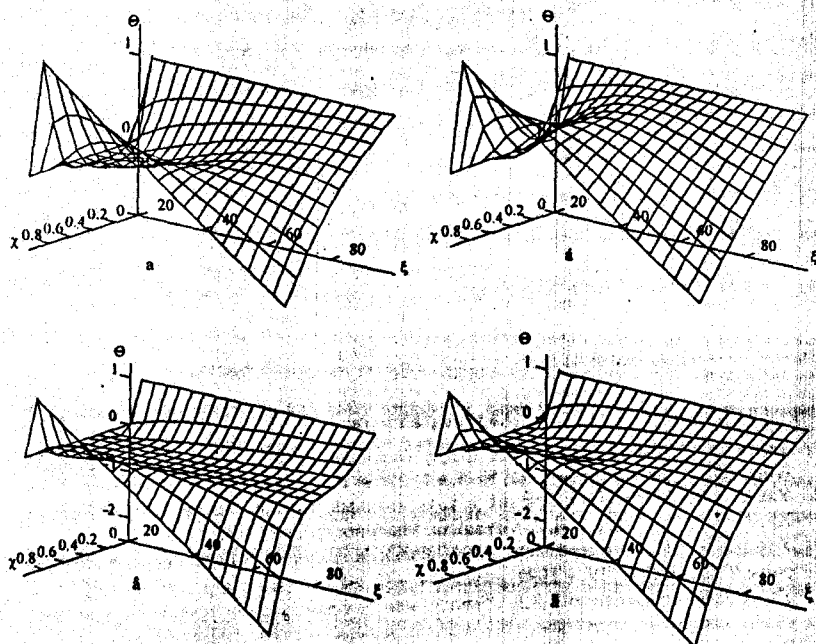


Рис. 6. Распределение безразмерной температуры в канале с параметрами $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 100$ и начальной температурой внутренней поверхности $\Theta_2 = 1,5$. а — для угла раскрытия $\alpha = 15^\circ$, числа $Re = 10^4$, и $b = -0,03$; б — для $\alpha = 90^\circ$, $Re = 10^4$, $b = -0,03$; в — для $\alpha = 15^\circ$, $Re = 7 \cdot 10^4$, $b = -0,05$; г — для $\alpha = 90^\circ$, $Re = 7 \cdot 10^4$, $b = -0,05$.

Точность расчета может быть проверена с помощью закона сохранения энергии:

$$\text{ср}Q(\Delta\bar{T} - T_0) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} [(q_1 - q_2)R \sin \alpha + hq_2 \cos \alpha] dR, \quad (62)$$

где q_1 и q_2 — тепловые потоки на границах канала, $\chi = 0$ и $\chi = 1$ соответственно. В безразмерном виде (62) запишется:

$$\text{Рс}\bar{\Theta} = 2 \left\{ \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[\xi \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} - \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} \right) \sin \alpha - \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} \cos \alpha \right] d\xi \right\}. \quad (63)$$

Расчеты показывают, что правая и левая часть (63) совпадают с точностью, с которой выполняются вычисления.

Обозначения:

a - коэффициент температуропроводности, $\text{м}^2/\text{с}$; b - линейный коэффициент изменения температуры внутренней поверхности канала; c - удельная теплоемкость, $\text{Дж}/\text{кг К}$; h - ширина канала, м ; P, P_0 - давление текущее и на входе, Па ; Q - объемный расход, $\text{м}^3/\text{с}$; R - координата радиальная, м ; T, T_0 - температура текущая и на входе в канал, К ; T_1 - температура границы, образованной внешним конусом, К ; T_2, T_3 - температура границы, образованной внутренним конусом на входе в канал и выходе из него, К ; V, V_0 - скорость текущая и на входе в канал, $\text{м}/\text{с}$; x, y, z - декартовы координаты, м ; α - половина угла раскрытия конуса, рад ; β - постоянная разделения; λ - теплопроводность жидкости, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; γ - динамический коэффициент вязкости, $\text{Па}\cdot\text{с}$; ρ - плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$; X - поперечная биконическая координата, м ; $Gn = \frac{\gamma V_0^2}{\lambda \Delta T_{\text{стат}}}$ - число Нема-Гриффита,

$Pe_0 = \frac{V_0 h c \rho}{\lambda}$ - число Пекле на входе в канал, $Re = \frac{h V_0 \rho}{\gamma}$ - число Рейнольдса.

Литература:

1. Ульев Л.М. Медленные течения между соосными коническими поверхностями // Инж.-физ. журн. - 1998. - Т. 71, №. 6. - С. 1092- 1098.
2. Ульев Л.М. Медленные течения в коаксиальных конических каналах // Вестник ХГПУ. - 1997. - Вып. 7. Ч. 2. Механика. Машиностроение. - С. 22-31.
3. Ульев Л.М. Медленные течения в коаксиальных конических щелях переменной ширины // Вестник ХГПУ. - 1999. - Вып. 34. - С. 3-8.
4. Ульев Л.М., Товажнянский Л.Л. Теплообмен при ламинарном течении между коаксиальными эквидистантными коническими поверхностями. Диффузорное течение // Вестник ХГПУ. - 1998. - Вып. 10. - С. 3-12.
5. Ульев Л.М. Теплообмен при медленном диффузорном течении в кольцевых конических каналах переменной ширины // Информационные технологии: Наука, техника, технология, образование, здоровье: Сб. науч. тр.- Харьков ХГПУ, 1998. - Вып. 6. Ч. 3. - С. 509-513.
6. Ульев Л.М. Ламинарный теплообмен для четных граничных условий первого рода при диффузорном течении в коническом зазоре // Вестник ХГПУ. - 1999. - Вып. 47. - С. 7-15.
7. Ульев Л.М. Ламинарный теплообмен для нечетных граничных условий первого рода при диффузорном течении в коническом зазоре // Информационные технологии: Наука, техника, технология, образование, здоровье: Сб. науч. тр.- Харьков ХГПУ, 1999. - Вып. 7. Ч. 4. - С. 110-118.
8. Гольдин А.М., Карамзин В.А. Гидродинамические основы процессов тонкослойного сепарирования. -М.: Агропромиздат, 1985. - С. 264.
9. Лыков А.В. Теплообмен: Справочник -М.: Энергия, 1972. - С. 560.