ВЕСТНИК

НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА "ХПИ"

13'2003

Харьков

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА "ХПИ"

Сборник научных трудов
Тематический выпуск "Химия, Химическая технология и экология"

13'2003

Издание основано Национальным техническим университетом "ХПИ" в 2001 году

Государственное издание
Свидетельство Госкомитета по информационной политике Украины
КВ № 5256 от 2 июля 2001 года

АДРЕС РЕДКОЛЕГИИ
61002, Харьков, ул.Фрунзе, 21
Кафедра керамики НТУ "ХПИ"
Тел. (0572) 40 – 00 – 51

Харьков 2003

УДК 532.5: 678.027

Л.М. УЛЬЕВ, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»

ДИАПАЗОН ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА, В КОТОРОМ ЛАМИНАРНОЕ ДИФФУЗОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ЛИНЕЙНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ШИРИНОЙ МОЖНО СЧИТАТЬ БЕЗИНЕРЦИОННЫМ

У роботі одержано критичні значення чисел Рейнольдсу, аж до яких можна нехтувати інерційними властивостями при розрахунках перепаду тиску для ламінарної дифузорної течії у співвісному конічному каналі як у випадку лінійного збільшення ширини вздовж течії, так і зменшення ширини вздовж течії.

Critical Reynolds numbers until to which we can neglect inertial properties of flow with calculation of pressure drop are received both for channels with increase its width and decrease its width along the flow.

Введение

Изучение ламинарных течений в каналах различной геометрии является одной из фундаментальных задач гидродинамики, так как на его основе проводится исследование ряда других проблем, возникающих при создании устройств и аппаратов в различных отраслях промышленности. Например, при проектировании оборудования для синтеза и переработки полимеров появляется необходимость расчета течения расплавов полимеров в коаксиальных конических каналах, которые являются неотъемлемой частью распределительных устройств экструзионных головок для производства труб, шлангов, пленок, кабелей и т.д. [1, 2].

В работах [3, 4] автором решены задачи медленного диффузорного течения в соосном канале, образованном коническими поверхностями с общей вершиной и в соосном коническом канале постоянной ширины. В работе [5] исследовалось ползущее медленное диффузорное течение в соосных конических каналах переменной ширины в случае, когда границы не имеют общей вершины.

Однако течение в конических каналах имеет существенную особенность, а именно, изменение средней скорости жидкости вдоль течения вследствие изменения площади поперечного сечения канала. Поэтому инерционная сила, действующая на жидкость, будет отлична от нуля практически вдоль всей длины канала.

Анализ ламинарного диффузорного течения с частичным учетом инерционного члена в уравнениях движения при течении в соосном канале, образованном коническими поверхностями с общей вершиной, сделан автором в работе [6]. Там же определен интервал изменения чисел Рейнольдса, в кото-

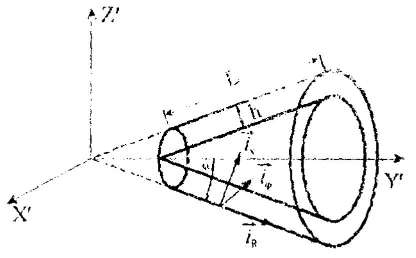

Рис. 1.Связь биконической системы координат с геометрией канала: L – длина конической части канала, м; h – ширина зазора, м: i_R, i_χ, i_φ- орты в биконической системе координат

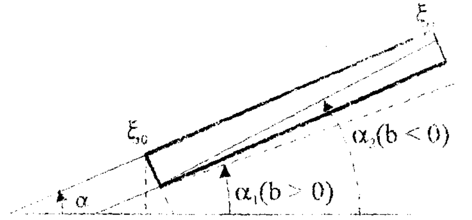

Рис. 2. Геометрия канала с изменяющейся шириной вдоль течения

ром влиянием инерционных свойств на вычисление перепада давления при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ можно пренебречь. Аналогичная задача для соосного конического канала постоянной ширины решена в [7], а в работе [8] данная задача решена автором в плоском приближении, т.е. в случае ламинарного диффузорного течения в секториальном канале постоянной ширины. В работе [9] решена задача ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале переменной ширины вдоль течения с учетом инерционной силы, возникающей вследствие изменения средней скорости жидкости вдоль течения. Задача рассмотрена в биконических координатах (рис. 1). Поперечное сечение канала переменной ширины представлено на рисунке 2. В указанной работе получены распределения безразмерных величин скорости жидкости и давления в канале:

$$v = \frac{6(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha)\left\{\left[1 + b(\xi - \xi_0)\right]\chi - \chi^2\right\}}{2\left[1 + b(\xi - \xi_0)\right]^3 \xi - \left[1 + b(\xi - \xi_0)\right]^4 \mathrm{ctg}\alpha}. \tag{1}$$

$$\Pi(\xi) = F_1(\xi) + F_2(\xi), \tag{2}$$

где выражение:

$$F_1(\xi) = \frac{6(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha)}{1 - b\xi_0}\left\{\frac{(b\,\mathrm{ctg}\alpha - 2)^2}{4(1 - b\xi_0)^2}\ln\frac{(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha)h(\xi)}{2\xi - h(\xi)\mathrm{ctg}\alpha} + \right.$$
$$\left. + \frac{b(\xi - \xi_0)}{2h(\xi)}\left[\frac{2 - b\,\mathrm{ctg}\alpha}{1 - b\xi_0} + \frac{1 + h(\xi)}{h(\xi)}\right]\right\}, \tag{3}$$

представляет диссипативную составляющую безразмерного давления, впервые полученную в работах [5] и [9], а выражение:

$$F_2(\xi)=\frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{1-\left[\frac{2\xi_0-\mathrm{ctg}\alpha}{h(\xi)\left[\xi(2-b\,\mathrm{ctg}\alpha)+(b\xi_0-1)\mathrm{ctg}\alpha\right]}\right]^2\right\} \tag{4}$$

является динамической составляющей безразмерного давления, $h(\xi) = 1 + b(\xi - \xi_0)$ – изменение безразмерной ширины канала вдоль течения. Безразмерные переменные определяются соотношениями:

$$\xi=\frac{R}{h_0},\ \chi=\frac{X}{h_0},\ V_0=\frac{Q}{\pi h_0^2(2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha)},\ v=\frac{V}{V_0},\ \Pi=\frac{(P-P_0)h_0}{\mu V_0}. \tag{5}$$

Несмотря на полученные решения и выполненные исследования, до сих пор не рассматривался в литературе вопрос о том, при каких соотношениях диссипативных и динамических сил последними, при определении перепада давления в соосном коническом диффузоре, можно пренебречь. В данной работе, основываясь на предыдущих исследованиях, мы ответим на поставленный вопрос.

Определение диапазона чисел Re, в котором можно пренебречь инерционными силами

Для определения характерных значений чисел Рейнольдса, при которых можно пренебречь влиянием инерционных сил на перепад давления в канале, в качестве значимой величины примем относительное отклонение перепада давления в канале, вычисленное с учетом инерционных сил от перепада давления, вычисленного без их учета, равное 5%. Обозначим относительное отклонение указанных величин как:

$$\varepsilon=\frac{\Pi-F_1}{F_1}, \tag{6}$$

и тогда при $\varepsilon \le 0.05$ для расчета давления можно использовать выражение (3).

Используя выражения (3), (4) и (6), получим соотношение, определяющее ε как функциональную зависимость от ξ, что даст нам возможность исследовать значения ε в пределах всей длины канала:

$$\varepsilon(\xi)=\frac{\frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{1-\left[\frac{2\xi_0-\mathrm{ctg}\alpha}{h(\xi)\left[\xi(2-b\,\mathrm{ctg}\alpha)+(b\xi_0-1)\mathrm{ctg}\alpha\right]}\right]^2\right\}}{\frac{6(2\xi_0-\mathrm{ctg}\alpha)}{1-b\xi_0}\left\{\frac{(b\,\mathrm{ctg}\alpha-2)^2}{4(1-b\xi_0)^2}\ln\frac{(2\xi_0-\mathrm{ctg}\alpha)h(\xi)}{2\xi-h(\xi)\mathrm{ctg}\alpha}+\right.} \tag{7}$$

$$\overline{\left.+\frac{b(\xi-\xi_0)}{2h(\xi)}\left[\frac{2-b\,\mathrm{ctg}\alpha}{1-b\xi_0}-\frac{1+h(\xi)}{h(\xi)}\right]\right\}}.$$

Использовать выражение (7) для оценки влияния инерционных сил на перепад давления в канале неудобно из-за его громоздкости, и желательно для этого получить более простые соотношения. В работе [9] мы видели, что величина $\varepsilon(\xi)$ достигает максимальных значений либо на входе в канал, либо на выходе из него, а между значениями $\varepsilon(\xi_0)$ и $\varepsilon(\xi_1)$ функция $\varepsilon(\xi)$ является монотонной. Поэтому, если мы определили два характерных предельных значения ε для заданной геометрии канала, выберем большее из них, и именно для него определим величину Re^*, то для $\mathrm{Re} \le \mathrm{Re}^*$ можно уверенно пренебрегать инерционными силами.

Рассмотрим сначала канал с увеличивающейся шириной вдоль течения. Вычисляя значение ε при $\xi\to\infty$, получим:

$$\lim_{\xi\to\infty}\varepsilon(\xi)=\frac{\mathrm{Re}(1-b\xi_0)^3}{3(2\xi_0-\mathrm{ctg}\alpha)\left\{(b\,\mathrm{ctg}\alpha-2)^2\ln\frac{b(b\,\mathrm{ctg}\alpha-2\xi_0)}{b\,\mathrm{ctg}\alpha-2}+\right.} \tag{8}$$

$$\overline{\left.+2(1-b\xi_0)\left[3-b(\xi_0+\mathrm{ctg}\alpha)\right]\right\}}.$$

Для радиального течения между плоскостью и конусом с осью перпендикулярной плоскости, т.е. при $\alpha = 90°$, получим:

$$\lim_{\xi\to\infty}\varepsilon(\xi)=\mathrm{Re}\frac{(1-b\xi_0)^3}{12\xi_0\left[2\ln b\xi_0+(1-b\xi_0)(3-b\xi_0)\right]}. \tag{9}$$

Выражения (8) и (9) показывают, что при $b > 0$ влияние инерционных сил на перепад давления будет сравнимо с перепадом давления за счет трения в канале любой величины.

Отметим также, что в случае $b \to 0$, $\varepsilon(\infty) \to 0$, что совпадает с результатами работы [7].

Вычислим значение ε при $\xi \to \xi_0$. Прямая подстановка ξ_0 в (7) приводит к неопределенности типа 0/0, раскрываем ее с помощью правила Лопиталя и, вычисляя предел при $\xi \to \xi_0$, получим:

$$\varepsilon(\xi_0) = -\mathrm{Re}\frac{1 + b(\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha)}{6(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha)}. \tag{10}$$

Заметим, что при применении правила Лопиталя к выражению (7) мы от отношения безразмерного давления, обусловленного действием инерционной силы к безразмерному давлению, обусловленному работой силы трения, переходим к отношению градиентов этих давлений, т.е. в данном случае правило Лопиталя приобретает конкретный физический смысл.

Для всех рассмотренных в [9] случаев течения в канале с увеличивающейся шириной, т.е. $b > 0$, величина $\varepsilon(\xi_0) > \varepsilon(\xi_1)$. Более того, если мы построим функцию $f(b,\alpha) = {\varepsilon(\infty)}/{\varepsilon(\xi_0)}$, то во всем диапазоне изменения параметров b и α отношение ${\varepsilon(\infty)}/{\varepsilon(\xi_0)} < 1$ выполняется для всех возможных значений ξ_0. Следовательно, для определения числа Рейнольдса, начиная с которого инерционные силы, возникающие при ламинарном диффузорном течении жидкости в соосном коническом канале с увеличивающейся шириной, будут оказывать существенное влияние на распределение давления, мы должны использовать выражение (10). Для 5% критерия значимости получим:

$$\mathrm{Re}^* = \left|\frac{0.3(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha)}{1 + b\xi_0 - b\,\mathrm{ctg}\alpha}\right|. \tag{11}$$

Для течения при $\alpha = 90°$ получим:

$$\mathrm{Re}^*_{\alpha=90°} = \frac{0.6\xi_0}{1 + b\xi_0}, \tag{12}$$

а при $b = 0$ получим результат, найденный ранее автором в работе [7] для течения в канале с постоянной шириной.

Обратимся теперь к рассмотрению канала с уменьшающейся шириной вдоль течения жидкости. Очевидно, что и в этом случае значение $\varepsilon(\xi_0)$ определяется выражением (10).

Для определения характерного значения ε на выходе из канала мы уже не вправе ξ устремлять к ∞, поскольку ширина канала не может быть отрицательной. Вычисление $\varepsilon(\xi_1)$ при $b < 0$ для различных параметров по (10) показывают, что величина $\varepsilon(\xi)$ является монотонно растущей функцией $|b|$ для любых остальных параметров. Такая зависимость показывает, что $\varepsilon(\xi_1)$ будет максимальным при $h(\xi_1) = 0$. Подставив в (17) вместо b величину $b = \dfrac{h(\xi_1)-1}{\xi_1 - \xi_0}$ и *положив* $h(\xi_1) = 0$, *получим* неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, раскрывая которую по правилу Лопиталя и устремляя $h(\xi_1)$ к 0, получим:

$$\lim_{h(\xi_1)\to 0} \varepsilon(\xi_1) = \mathrm{Re}\,\frac{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{24(\xi_1 - \xi_0)\xi_1}. \tag{13}$$

Для $\alpha = 90°$ получим соотношение:

$$\lim_{h(\xi_1)\to 0} \varepsilon(\xi_1) = \frac{\mathrm{Re}}{12(\xi_1 - \xi_0)}\frac{\xi_0}{\xi_1}. \tag{14}$$

Ранее было отмечено, что функция $\varepsilon(\xi)$ – монотонно растущая, а $\varepsilon(\xi_1)$ стремится к своему максимуму при $b \to \dfrac{1}{\xi_0 - \xi_1}$, т.е. максимальные отличия в расчете перепада давления с учетом инерционных сил и без их учета будет определяться либо выражением (10), либо выражением (13). Действительно, если мы построим зависимость отношения $\left|\dfrac{\varepsilon(\xi_0)}{\varepsilon(\xi_1)}\right|$ от b и α для различных значений ξ_0 и ξ_1, то увидим, что они существенно различны, а само отношение $\left|\dfrac{\varepsilon(\xi_0)}{\varepsilon(\xi_1)}\right|$ может быть как > 1, так и < 1.

Для относительно длинных каналов, т.е. для каналов, в которых отношение $\dfrac{\xi_1}{\xi_0} > 2$, при использованных ранее предположениях площадь поверхности поперечного сечения на выходе из канала постоянной ширины ($b = 0$) намного больше площади поперечного сечения на его входе. Поэтому средняя скорость на выходе из канала значительно меньше, чем на входе в канал, вследствие этого влияние инерционных сил вблизи выхода из канала меньше, чем вблизи входа, и отношение $\left|\dfrac{\varepsilon(\xi_0)}{\varepsilon(\xi_1)}\right|$ при малых абсолютных величинах b много больше 1.

Увеличение $|b|$ до максимума в представленном случае, т.е. для $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$ не приводит к значительной функциональной зависимости $\varepsilon(\xi)$ вблизи выхода из диффузора, поэтому влияние инерционных сил вблизи входа в канал преобладает для всех возможных значений b. Заметим, что минимальное отношение $\left|\dfrac{\varepsilon(\xi_0)}{\varepsilon(\xi_1)}\right|$ наблюдается при $\alpha = 90°$ и наименьшем значении b:

$$\left|\frac{\varepsilon(\xi_0)}{\varepsilon(\xi_1)}\right|_{\min} = \frac{\xi_1}{\xi_0}\left|\frac{\xi_1}{\xi_0} - 2\right|, \tag{15}$$

и в данном случае оно равно 8.

Заметим, что отношение (15) получено из выражений (10) и (13) с учетом того, что при $h(\xi_1) \to 0$, $b \to \dfrac{1}{\xi_0 - \xi_1}$.

Из (15) мы находим точное соотношение между значениями ξ_0 и ξ_1, при котором влияние инерционных сил на входе в канал будет больше, чем на выходе из него $-\xi_1 > \xi_0\left(1 + \sqrt{2}\right)$ для всех возможных отрицательных значений b и практически интересных значений α.

Очевидно, что в данном случае для определения числа Re^* необходимо использовать выражение (11).

Из (15) следует, что при $\xi_1 = 2\xi_0$ и $\alpha = 90°$, $\varepsilon(\xi_0) = 0$. Этот результат можно получить и непосредственно из (10). Из (10) также следует, что при $b = \dfrac{1}{\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}$ инерционные силы, возникающие вследствие изменения площади поперечного сечения канала, не оказывают никакого влияния на перепад давления в канале вблизи входа в канал.

В случаях, когда выполняется соотношение $\xi_0 < \xi_1 \le \xi_0\left(1 + \sqrt{2}\right)$ отношение $\left|\dfrac{\varepsilon(\xi_0)}{\varepsilon(\xi_1)}\right|$ практически для всех значений α и b меньше, за исключением незначительного превышения 1 при малых полууглах раскрытия, для которых определять Re^* можно как по (10), так и по (13). Для простоты записи здесь выберем (13).

Действительно, при малых абсолютных значениях b площадь поперечного сечения канала вдоль течения увеличивается, а значит, средняя скорость жидкости с увеличением ξ уменьшается и инерционные силы существенны в начале течения. Дальнейшее увеличение $|b|$ приводит к уменьшению изменения поперечного сечения канала вдоль течения, а значит, к уменьшению влияния инерционных сил, и при некоторых значениях $|b|$ $\varepsilon(\xi_0)$ достигает своего минимума. Последующее увеличение $|b|$ ведет к уменьшению площади поперечного сечения канала вдоль течения, т.е. средняя скорость будет расти вдоль ξ. Это приводит к увеличению влияния инерционных сил и, соответственно, к росту $\varepsilon(\xi_0)$.

Итак, для определения числа Рейнольдса , вплоть до которого мы при расчете перепада давления для диффузорного течения в соосном коническом канале с уменьшающейся шириной вдоль течения можем пренебречь влиянием инерционных сил, вызванных изменением поперечного сечения канала, можно записать:

$$\mathrm{Re}^* = \begin{cases} \left|\dfrac{0.3\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha\right)}{1 + b\left(\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha\right)}\right|, & \xi_1 > \xi_0\left(1+\sqrt{2}\right), \\ \left|\dfrac{1.2\xi_1\left(\xi_1 - \xi_0\right)}{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha}\right|, & \xi_0 < \xi_1 \le \xi_0\left(1+\sqrt{2}\right). \end{cases} \qquad (16)$$

Выражения (16) справедливы для распределения давления вдоль всего канала, но если нас интересует расчет перепада давления только на выходе из канала, то в этом случае необходимо пользоваться выражением:

$$\mathrm{Re}^* = \begin{cases} \left|\dfrac{0.3\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha\right)}{1 + b\left(\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha\right)}\right|, & b > 0, \\ \left|\dfrac{1.2\xi_1\left(\xi_1 - \xi_0\right)}{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha}\right|, & b < 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Заметим, что в выражениях (16) и (17) фигурирует значение ξ_1, хотя оно не является параметром, определяющим решение (1), (2). Это происходит потому, что данная величина определяет предельное значение b – параметра, входящего в решение задачи, а, именно, для предельного значения b мы определяли величину $\varepsilon(\xi_1)$ при $b < 0$.

Заключение

В работе определены критические значения чисел Рейнольдса, вплоть до которых можно пренебрегать инерционными свойствами течения при вычислении перепада давления в соосном коническом диффузоре с линейно изменяющейся шириной канала вдоль течения. Полученные значения позволят упростить расчеты оптимальных технологических и конструкционных параметров формующего оборудования.

Обозначения

h – ширина канала, м; P, P_0 – давление текущее и на входе, Па; Q - объёмный расход, $м^3/с$; R, R_0, R_1 – координата радиальная и выхода из канала и входа в него, м; V – скорость, м/с; x', y', z' – декартовы координаты, м; α – половина угла внешней конической поверхности, рад; ρ – удельная плотность жидкости, $кг/м^3$; μ – вязкость, Па·с; X – поперечная биконическая координата, м; $Re = \frac{\rho h V_0}{\mu}$ – число Рейнольдса.

Список литературы: 1. *Joshi M. V.* Dies for plastics extrusion. Delhi: Macmillan. India Limited, 1984. 176 p. **2.** *Sors L., Bardocz L., Radnoti I.* Plastic molds and dies. Budapest: Akademiai Kiado, 1980. 495 p. **3.** *Ульев Л.М.* Медленные течения между соосными коническими поверхностями // ИФЖ. 1998. Т. 71, №. 6. С. 1092 – 1098. **4.** *Ульев Л.М.* Медленные течения в коаксиальных конических каналах // Вестник ХГПУ. Механика. Машиностроение. Харьков, ХГПУ. 1997. Вып. 7. Ч. 2. С. 22 – 31. **5.** *Ульев Л.М.* Медленные течения в коаксиальных конических щелях переменной ширины // Вестник ХГПУ. 1999. Вып. 34. С. 3 – 8. **6.** *Ульев Л.М.* Решение задачи ламинарного течения между коническими поверхностями с общей вершиной при частичном учете инерционных свойств // Вестник НТУ "ХПИ". 2001. № 3. Харьков. НТУ "ХПИ". С. 224 – 235. **7.** *Ульев Л.М.* Решение задачи ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины с частичным учетом инерционных свойств // Вестник НТУ "ХПИ". 2002. № 6. Харьков. НТУ "ХПИ". С. 66 – 71. **8.** *Ульев Л.М.* Ламинарное диффузорное течение в секториальном канале постоянной ширины с частичным учетом инерционных свойств // Вестник НТУ "ХПИ". 2003. Вып. 11. Т. 2. Харьков. НТУ "ХПИ". С. 122 – 131. **9.** *Ульев Л.М.* Ламинарное диффузорное течение в соосном коническом канале переменной ширины с частичным учетом сил инерции // Вестник НТУ "ХПИ". 2003. Вып. 12. Харьков. НТУ "ХПИ". С. 56 – 65.

Поступила в редколлегию 18.09.03