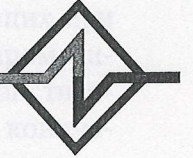
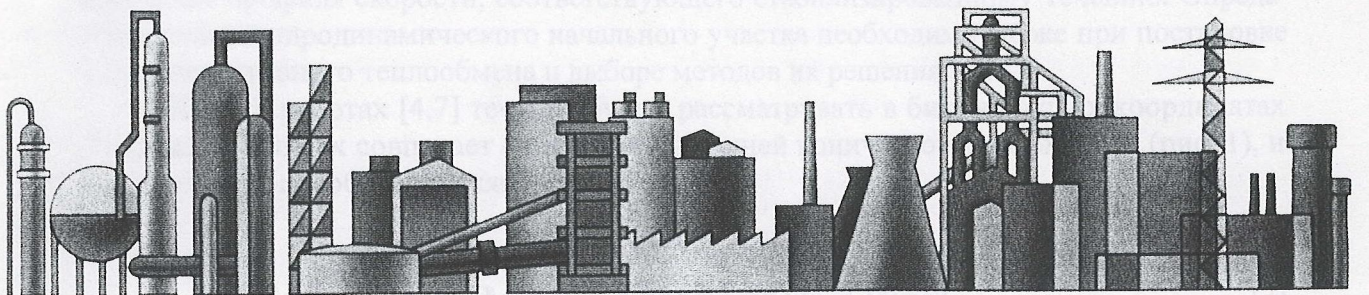


# ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ

ЩОКВАРТАЛЬНИЙ НАУКОВО-ПРАКТИЧНИЙ ЖУРНАЛ



## 1'2000



Ульев Л.М.

## РАЗВИТИЕ ЛАМИНАРНОГО ДИФFUЗОРНОГО ТЕЧЕНИЯ В КОНИЧЕСКОЙ ЩЕЛИ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

Харьковский государственный политехнический университет

Изучение и определение характера течения вязких жидкостей в каналах различной геометрии является одной из фундаментальных задач гидродинамики, т.к. на основе такого изучения проводится исследование ряда других проблем, возникающих при создании проточных деталей в устройствах и аппаратах различных отраслей промышленности. В настоящей работе мы будем рассматривать стационарное, пространственно-неустановившееся диффузорное течение в канале, образованном соосными коническими поверхностями с параллельными образующими (рис.1).

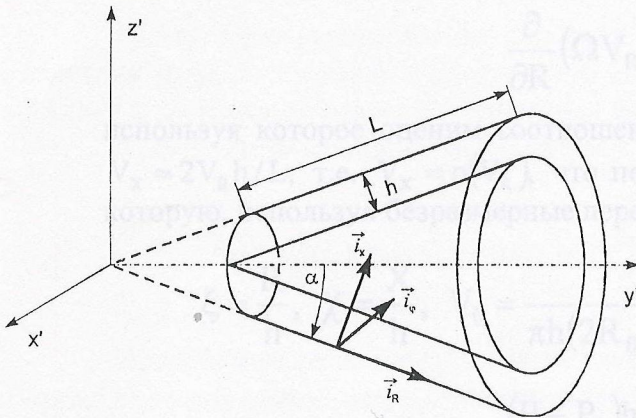


Рис. 1. Геометрия конического зазора постоянной ширины

$L$  – длина конической части канала, м;  
 $h$  – ширина зазора, м;  
 $i_R, i_X, i_\varphi$  – орты в биконической системе координат

В работе [1] исследовано радиальное течение вязкой жидкости в канале, образованном соосными конусами с общей вершиной. Решение получено с учетом инерционных членов, но в виде, затрудняющем его практическое использование. В работе [2] методом конечных элементов исследуется течение жидкости на участке установившегося течения между конусами при постоянной ширине зазора между ними. Авторы [2] по заданному перепаду давления определяют поле скорости и расход, однако в инженерной практике, как правило, требуется решение обратной задачи. В работе [3] представлены критериальные зависимости для определения перепада давления в конических кольцевых каналах, но только для некоторых частных случаев течения и без указания всех определяющих параметров задачи. В работе [4] автором решена задача медленного, установившегося течения жидкости между соосными конусами с произвольным расположением вершин, но использовать эти решения мы можем только для каналов, длина которых значительно превосходит величину гидродинамического начального участка [5]. В других случаях необходимо рассматривать течение жидкости на участке, где происходит формирование профиля скорости, соответствующего стабилизированному течению. Определение длины гидродинамического начального участка необходимо также при постановке задач конвективного теплообмена и выборе методов их решения [6].

Как и в работах [4,7] течение будем рассматривать в биконических координатах [8], начало которых совпадает с вершиной внешней конической поверхности (рис. 1), и определяемых преобразованиями:

$$z' = R \cos \alpha + X \sin \alpha, \quad (1)$$

$$y' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \sin \psi = \Omega \sin \psi, \quad (2)$$

$$x' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \cos \psi = \Omega \cos \psi. \quad (3)$$

Вычисляя коэффициенты Ламэ  $N_X = 1$ ,  $N_R = 1$ ,  $N_\psi = \Omega$  и следуя работе [5], получим уравнения аксиально-симметричного изотермического течения жидкости в бикоординатных координатах в приближении Озеена:

$$\rho U \frac{\partial V_R}{\partial R} = -\frac{\partial P}{\partial R} + 2\mu \frac{\partial^2 V_R}{\partial R^2} + \mu \frac{\partial^2 V_R}{\partial X^2} - \frac{\mu \cos \alpha}{\Omega} \frac{\partial V_R}{\partial X} + \frac{2\mu \sin \alpha}{\Omega} \frac{\partial V_R}{\partial R} - \frac{2\mu \sin^2 \alpha}{\Omega^2} V_R, \quad (4)$$

$$\rho U \frac{\partial V_X}{\partial X} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \mu \frac{\partial^2 V_X}{\partial X^2} + \frac{\mu \sin \alpha}{\Omega} \frac{\partial V_X}{\partial X} + \mu \frac{\partial^2 V_X}{\partial R^2} - \frac{\mu \cos \alpha}{\Omega} \frac{\partial V_R}{\partial R}, \quad (5)$$

где  $U = \frac{Q}{\pi h(2R \sin \alpha - h \cos \alpha)}$  – средняя скорость течения в канале.

Уравнение неразрывности для аксиально-симметричного течения запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial R}(\Omega V_R) + \frac{\partial}{\partial X}(\Omega V_X) = 0, \quad (6)$$

используя которое оценим соотношения между характерными величинами  $V_R$  и  $V_X$ ,  $V_X \approx 2V_R h/L$ , т.е.  $V_X = o(V_R)$ , что позволяет упростить систему уравнений (4) - (6), которую, используя безразмерные переменные и параметры:

$$\xi = \frac{R}{h}, \quad \chi = \frac{X}{h}, \quad V_0 = \frac{Q}{\pi h(2R_0 \sin \alpha - h \cos \alpha)}, \quad v = \frac{V_R}{V_0}, \quad Re = \frac{\rho h V_0}{\mu},$$

$$\Pi = \frac{(P - P_0)h}{\mu V_0}, \quad \sigma = \xi \sin \alpha - X \cos \alpha,$$

запишем в виде:

$$Re_0 \frac{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha}{2\xi \sin \alpha - \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sigma \frac{\partial v}{\partial \chi} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} - \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\sigma^2} v = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\sigma v) = 0. \quad (9)$$

В практически интересных случаях всегда выполняется условие  $\xi \operatorname{tg} \alpha \gg 1$  [4], благодаря чему мы можем записать  $\sigma \approx \xi \sin \alpha$ . Выполнив оценку величины производных в системе уравнений (7) - (9), получим  $\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \approx v + Re_0 \frac{V}{\xi}$ ,  $\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} \approx \frac{v}{\xi^2 \operatorname{tg} \alpha}$ , т.е. можно

положить  $\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} = 0$  и редуцировать систему уравнений (7), (8) к следующему уравнению:

$$\operatorname{Re}_0 \frac{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha}{2\xi \sin \alpha - \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}. \quad (10)$$

Граничными условиями являются прилипания условия на границах канала:

$$v = 0, \chi = 0, \quad (11)$$

$$v = 0, \chi = 1. \quad (12)$$

Начальными условиями для интегрирования (10) являются заданные величины давления и скорости на входе в канал:

$$v = 1, \xi = \xi_0, 0 < \chi < 1, \quad (13)$$

$$\Pi = 0, \xi = \xi_0. \quad (14)$$

Однородное распределение скорости на выходе в канал соответствует случаю втекания жидкости в канал из достаточно большого резервуара [9], но это условие упрощает исследование гидродинамического начального участка.

Уравнение неразрывности (9) учтем с помощью условия постоянства расхода:

$$\int_0^1 (\xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha) v d\chi = \frac{1}{2} (2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha). \quad (15)$$

Представляя решение (10) в виде произведения  $\Phi(\xi\chi) = Y(\xi) \cdot \Psi(\chi)$  и рассматривая однородное уравнение, соответствующее уравнению (10), придем к задаче Штурма – Лиувилля:

$$\Psi'' + \beta^2 \Psi = 0, \quad (16)$$

$$\Psi = 0, \quad \chi = 0, \quad (17)$$

$$\Psi = 0, \quad \chi = 1, \quad (18)$$

где  $\beta$  – постоянная разделения для однородного уравнения. Решением (16) – (18) являются функции [10]:

$$\Psi_n(\chi) = \sin \pi n \chi, \quad (19)$$

и, следовательно, общее решение однородного уравнения (10) можно представить в виде:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\xi) \Psi_n(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\xi) \sin \pi n \chi. \quad (20)$$

Представляя градиент давления в виде разложения по собственным функциям, и подставляя это разложение совместно с (20) в (10), получим уравнение для определения функций  $Y_n(\xi)$ :

$$Y_n' + \frac{(\pi n)^2}{\text{Re}_0} \left( \frac{2\xi \sin \alpha - \cos \alpha}{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha} \right) Y_n + \frac{2(1 - \cos \pi n)}{\pi n \text{Re}_0} \left( \frac{2\xi \sin \alpha - \cos \alpha}{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha} \right) \Pi' = 0, \quad (21)$$

с начальным условием, полученным с помощью разложения (13) по синусам:

$$Y_n(\xi) = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos \pi n), \quad \xi = \xi_0. \quad (22)$$

Решением (21), (22) получаем с помощью вариации произвольной постоянной:

$$Y_n(\xi) = -\frac{2(1 - \cos \pi n)}{(\pi n)^3} \Pi' (1 - E_n) + \frac{2(1 - \cos \pi n)}{\pi n} E_n, \quad (23)$$

где  $E_n = \exp \left\{ \frac{(\pi n)^2 (\xi_0 - \xi) [\sin \alpha (\xi_0 + \xi) - \cos \alpha]}{\text{Re}_0 (2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)} \right\}$ .

Затем подставляя (23) в (20), мы получаем решение уравнения (10):

$$v = -2\Pi' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \pi n}{(\pi n)^3} (1 - E_n) \sin \pi n \chi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \pi n}{\pi n} E_n \sin \pi n \chi. \quad (24)$$

Для определения градиента давления  $\Pi'$  мы подставляем (24) в условие постоянства расхода (15) и после интегрирования получаем:

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1 - \cos \pi n) [(1 - \cos \pi n) \xi \sin \alpha + \cos \pi n \cos \alpha]}{(\pi n)^2} E_n \right\} - \frac{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha}{4}}{\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1 - \cos \pi n)}{(\pi n)^4} [(1 - \cos \pi n) \xi \sin \alpha + \cos \pi n \cos \alpha] (1 - E_n) \right\}}, \quad (25)$$

и тогда

$$\Pi(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\Pi}{d\xi} d\xi, \quad (26)$$

Далее прямой подстановкой (24) в уравнение (10) и в условия (11) – (13), убеждаемся, что они тождественно удовлетворяются, т.е. (24) является решением задачи (10) – (13). Также легко проверяется, что ряд (24) сходится абсолютно и равномерно везде в области  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\xi > \xi_0$ .

При  $\xi \rightarrow \xi_0$  выражение (25) для  $\frac{d\Pi}{d\xi} \rightarrow \infty$ , но в точке  $\xi = \xi_0$  задано однородное распределение скорости, которое мы и будем использовать при анализе развития профиля скорости на гидродинамическом начальном участке, а при вычислении перепада давления (26) мы исключим точку  $\xi = \xi_0$  из интегрирования, т.е.

$$\Pi(\xi) = \int_{\xi_0+0}^{\xi} \frac{d\Pi}{d\xi} d\xi. \quad (27)$$

Итак, выражения (24) – (27) являются решением задачи (7) – (9) и описывают распределение радиальной скорости и давления в канале от параметров задачи –  $\xi_0$ ,  $Re_0$  и угла  $\alpha$ .

Прежде чем приступить к исследованию течения на гидродинамическом начальном участке, рассмотрим профиль скорости и градиент давления на бесконечно большом расстоянии от входа в канал. При  $\xi \rightarrow \infty E_k \rightarrow 0$  в (24), (25), и тогда (25) примет вид:

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = - \frac{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha}{4 \left[ \xi \sin \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos \pi n)^2}{(\pi n)^4} + \cos \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n - \cos^2 \pi n}{(\pi n)^4} \right]}. \quad (28)$$

Учитывая, что  $\cos \pi n = (-1)^n$  и выполняется суммирование в знаменателе (28), получим:

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = - \frac{12(2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)}{2\xi \sin \alpha - \cos \alpha}. \quad (29)$$

Аналогично, для распределения скорости при  $\xi \rightarrow 0$  из (24) получим:

$$v(\chi, \xi) = \frac{6(2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha)}{2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha} (\chi^2 - \chi). \quad (30)$$

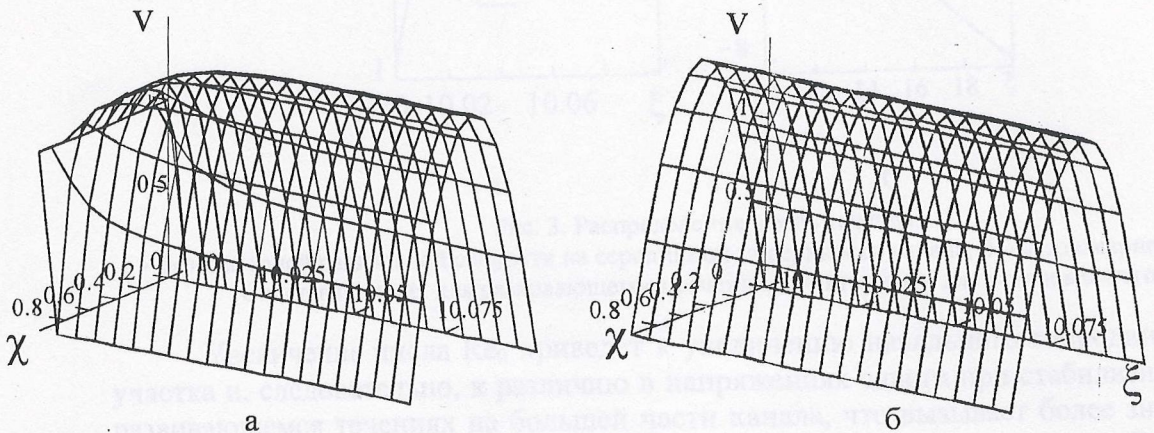


Рис. 2. Распределение безразмерной радиальной скорости при течении с параметрами:  
 $Re_0 = 1, \xi_0 = 10, \alpha = 30^\circ$   
 а – для развивающегося течения с однородным начальным распределением скорости;  
 б – для стабилизированного течения

Выражения (29) и (30) совпадают с результатами, полученными в [4] для установившегося режима течения и без учета инерционных сил.

В случае течения с малыми числами Рейнольдса профиль скорости устанавливается на достаточно малом расстоянии от входа (рис.2). Примем, что длина гидродинамического начального участка равна расстоянию от входа в канал, на котором относительное отклонение радиальной скорости рассматриваемого течения от радиальной скорости установившегося течения, взятых на срединных поверхностях канала, т.е. при  $\chi = 0,5$ , уменьшается до 1% [9]. Для течения с параметрами  $Re_0 = 1$ ,  $\alpha = 30^\circ$  и  $\xi_0 = 10$  длина участка динамической стабилизации равна  $\sim 0.064$ . Тогда для любых значений  $\xi_0$  и  $\alpha$ , удовлетворяющих условию  $\xi_0 \tan \alpha \geq 1$ , можно записать на основании статистической обработки численных экспериментов выражение, определяющее длину гидродинамического начального участка для значений  $Re_0 < 10$ :

$$\Delta \xi_{н.г.} = \xi_{н.г.} - \xi_0 \approx 0.066 Re_0. \quad (31)$$

Поскольку влияние инерционных членов при  $Re \leq 1$  пренебрежимо мало, перепад давления вдоль канала, в этих случаях, практически не отличается от перепада при установившемся режиме течения (рис.3), рассчитанном без учета инерционных сил. И только вблизи входа в канал, где происходит перестройка профиля скорости и имеется различие в напряжениях сдвига на границе, существует различие в перепадах давления (рис.3), которое при дальнейшем течении вдоль канала практически исчезает, что подтверждает возможность исключения начальной координаты  $\xi_0$  в (27) при определении перепада давления.

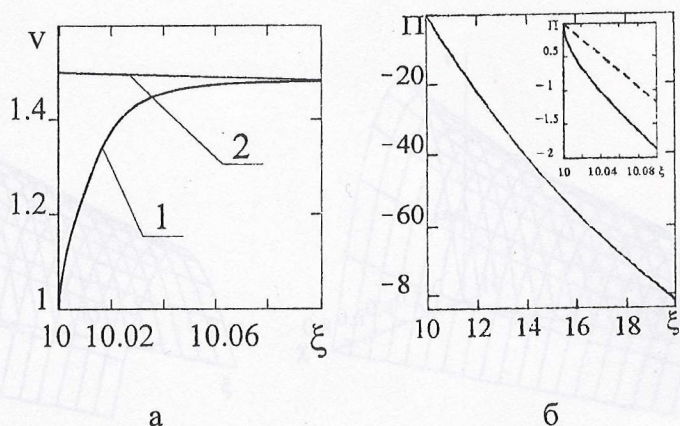


Рис. 3. Распределение вдоль течения:

а – безразмерной радиальной скорости на срединной поверхности канала; б – безразмерного давления. Сплошная линия для развивающегося течения, пунктирная – для установившегося

Увеличение числа  $Re_0$  приведет к увеличению начального гидродинамического участка и, следовательно, к различию в напряжениях сдвига при стабилизированном и развивающемся течениях на большей части канала, что вызывает более значительные отличия в распределении давления в канале. Кроме того, с увеличением  $Re_0$  более существенный вклад в распределение давления в канале будет вносить изменение динамического напора потока вдоль течения, вследствие увеличения поперечного сечения канала. Оценить влияние инерционных членов на перепад давления можно, вычисляя разность динамического напора потока жидкости для различных координат  $\xi$ , используя среднюю по сечению скорость:

$$\Pi_1 = \frac{Re_0}{2} (1 - \bar{v}^2), \quad (32)$$

или средний квадрат скорости по поперечному сечению канала:

$$\Pi_2 = \frac{Re_0}{2} (1 - \bar{v}^2) \quad (33)$$

Отметим, что выражения (32), (33) следует рассматривать как выражения, использующиеся исключительно для приближенной оценки величины изменения безразмерного динамического давления вдоль течения.

Выражение для определения перепада давления, вызванного трением на стенках канала, получим непосредственно из (24):

$$T = 4 \int_{\xi_0+0}^{\xi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \pi n) E_n - \Pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \pi n}{(\pi n)^2} (1 - E_n) \right\} d\xi. \quad (34)$$

При увеличении числа Рейнольдса увеличивается длина начального гидродинамического участка, и отличие в распределении скорости в канале от установившегося распределения становится ощутимым на большей его части (рис.4). Безразмерная длина начального гидродинамического участка при  $Re = 50$  и прежних остальных параметрах равна  $\Delta \xi_{н.г.} \approx 1,8$  (рис.5). Значительное различие в распределении скорости приводит и к ощутимому различию в распределении давления (рис.5).

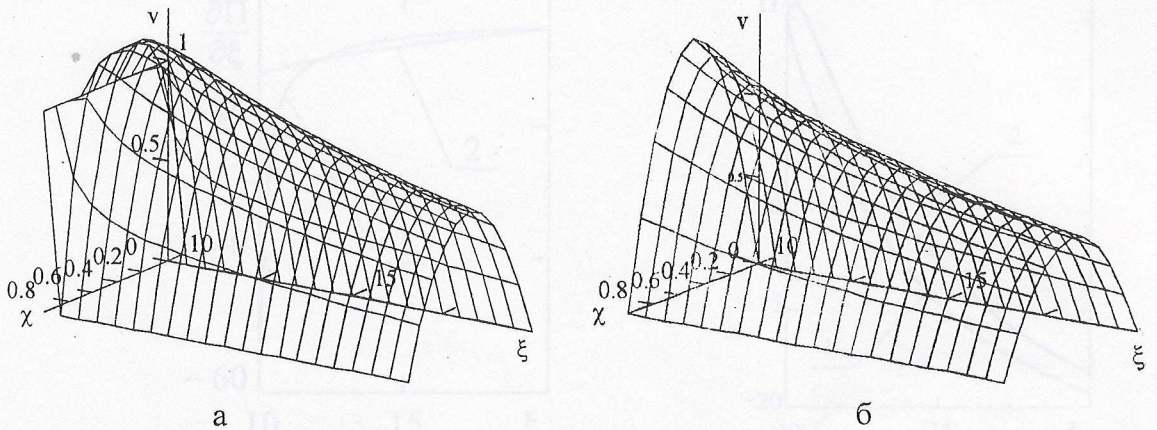


Рис. 4. Распределение безразмерной радиальной скорости при тчении с параметрами:  $Re_0 = 50$ ,  $\xi_0 = 10$ ,  $\alpha = 30^\circ$ , а – для развивающегося течения; б – для стабилизированного течения

Безразмерное давление в рассматриваемом случае уменьшается быстрее вблизи входа в канал, чем при установившемся течении (рис.5). Это связано с тем, что напряжение сдвига на стенке при однородном начальном распределении скорости на начальном участке больше, чем при установившемся течении, вследствие более крутого профиля скорости. Поэтому и безразмерная работа, затрачиваемая на трение, т.е. величины  $|T|$  (34) больше, чем безразмерный перепад давления при установившемся течении и рассчитанном без учета инерционных членов в уравнениях движения [4] (рис.5). В рассматриваемом случае при развитии профиля скорости увеличивается динамическое давление в жидкости, из-за увеличения скорости в центральной части канала (рис.4). Это увеличение можно оценить с помощью соотношения (36) (рис.6), а соотношения (34), (35) этот эффект не замечают, т.к. туда входит изменение средней по поперечному



сечению канала скорости, которое одинаково как для установившегося, так и для развивающегося течения. Указанные два эффекта и приводят к значительной абсолютной величине градиента давления вблизи входа в канал (рис.6).

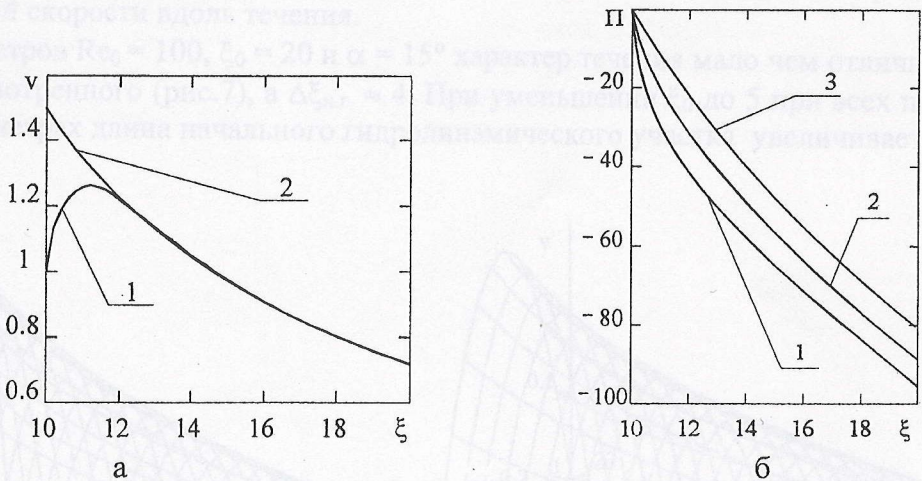


Рис. 5. Распределение вдоль течения с параметрами:  $Re_0 = 50$ ,  $\xi_0 = 10$ ,  $\alpha = 30^\circ$ :

а – безразмерной радиальной скорости на срединной поверхности канала;

1 – для развивающегося течения, 2 – для стабилизированного течения;

б – безразмерного давления для развивающегося течения – 1, 2 – для стабилизированного течения

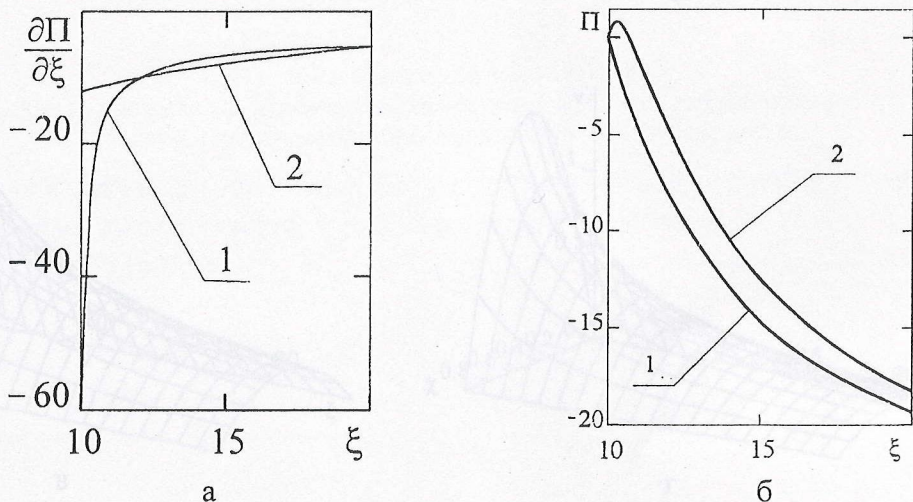


Рис. 6. Распределение вдоль течения:

а – безразмерного градиента давления; 1 – давления для развивающегося течения;

2 – для стабилизированного течения; б – оценка безразмерного динамического давления

при развивающемся течении: 1 – с помощью  $\Pi_1$ , 2 –  $\Pi_2$

При дальнейшем течении средняя скорость уменьшается, что ведет к уменьшению абсолютной величины градиента давления (рис.6), а при развивающемся течении модуль градиента давления становится даже меньше, чем при установившемся течении вследствие уменьшения динамического давления в жидкости (рис.6), и кривые перепада давления сближаются. Но при дальнейшем уменьшении скорости вдоль течения они становятся практически параллельными (рис.5), и уже на безразмерной длине канала  $\Delta \xi = 10$  относительное отличие в перепадах давления, для рассматриваемых течений, не превышает 20 %.

Дальнейшее увеличение числа  $Re$  приводит к увеличению влияния инерционных свойств потока, вследствие чего увеличивается как длина  $\Delta\xi_{н.г.}$ , так и вносятся значительные изменения в другие свойства течения. Существенное влияние приобретает величина  $\xi_0$  – координата входа в канал, т.к. от ее значения существенно зависит характер изменения средней скорости вдоль течения.

Для параметров  $Re_0 = 100$ ,  $\xi_0 = 20$  и  $\alpha = 15^\circ$  характер течения мало чем отличается от ранее рассмотренного (рис.7), а  $\Delta\xi_{н.г.} \approx 4$ . При уменьшении  $\xi_0$  до 5 при всех прочих равных параметрах длина начального гидродинамического участка увеличивается

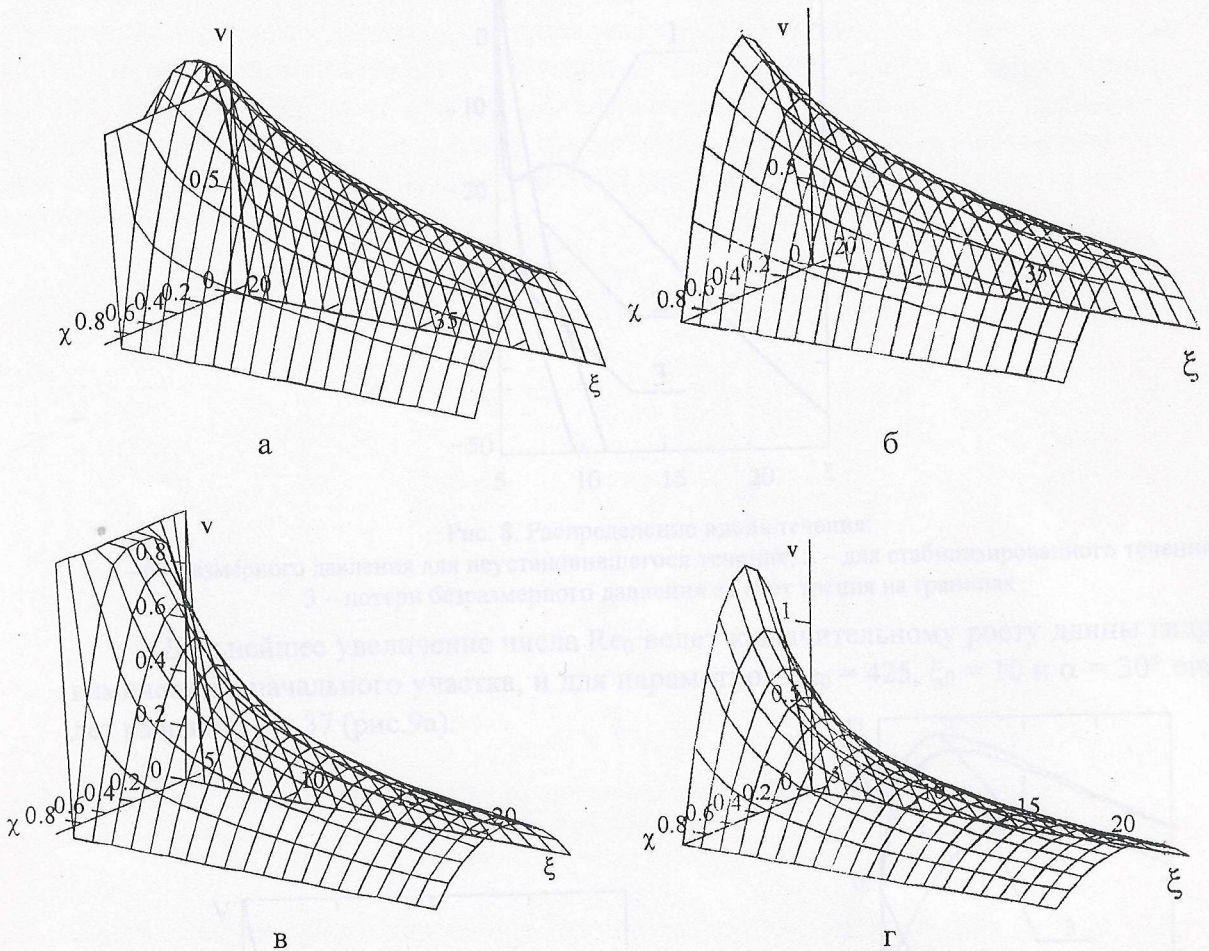


Рис. 7. Распределение безразмерной радиальной скорости при течении с параметрами:

$Re_0 = 100$ ,  $\xi_0 = 20$ ,  $\alpha = 15^\circ$  – (а, б) и  $Re_0 = 100$ ,  $\xi_0 = 5$ ,  $\alpha = 15^\circ$  (в, г);

(а, в) – для развивающегося течения; (б, г) – для стабилизированного течения

$\Delta\xi_{н.г.} \approx 10$ , а уменьшение средней скорости (рис.7) приводит к уменьшению динамического давления и, как следствие, к немонотонной зависимости общего перепада давления вдоль течения (рис.8), хотя перепад давления вследствие трения на границе, значительно больше, чем при установившемся течении (рис.8).

Из выражения для определения давления при установившемся течении [7] мы получим соотношение:

$$\Pi e_i = \Pi_{iso} - \Pi_i, \quad (35)$$

где  $i = 1, 2$ , а  $\Pi_{iso} = \frac{6(\cos \alpha - 2\xi_0 \sin \alpha)}{\cos \alpha} \ln \frac{\cos \alpha - 2\xi \sin \alpha}{\cos \alpha - 2\xi_0 \sin \alpha}$  – безразмерное давление в

случае ползущего установившегося течения.

Выражение (35) позволяет оценивать безразмерное давление при  $\xi_0 < 10$ ,  $\xi > \Delta\xi_{н.г.}$  и  $Re_0 \sim 100$  с точностью  $\sim 10 - 15\%$ , а при  $\xi_0 \geq 10$  приемлемая оценка получается с помощью расчета перепада давления для установившегося течения.

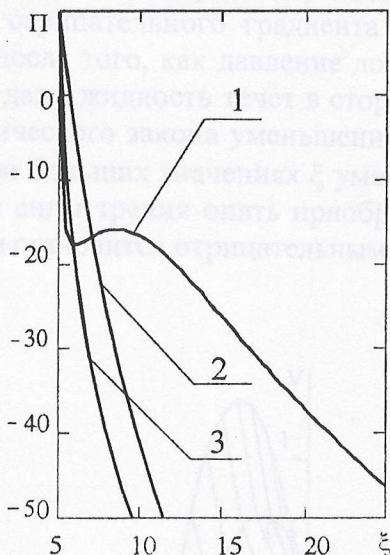


Рис. 8. Распределение вдоль течения:

- 1 – безразмерного давления для неустановившегося течения; 2 – для стабилизированного течения;
- 3 – потери безразмерного давления за счет трения на границах

Дальнейшее увеличение числа  $Re_0$  ведет к значительному росту длины гидродинамического начального участка, и для параметров  $Re_0 = 425$ ,  $\xi_0 = 10$  и  $\alpha = 30^\circ$  она будет равна  $\Delta\xi_{н.г.} = 37$  (рис.9а).

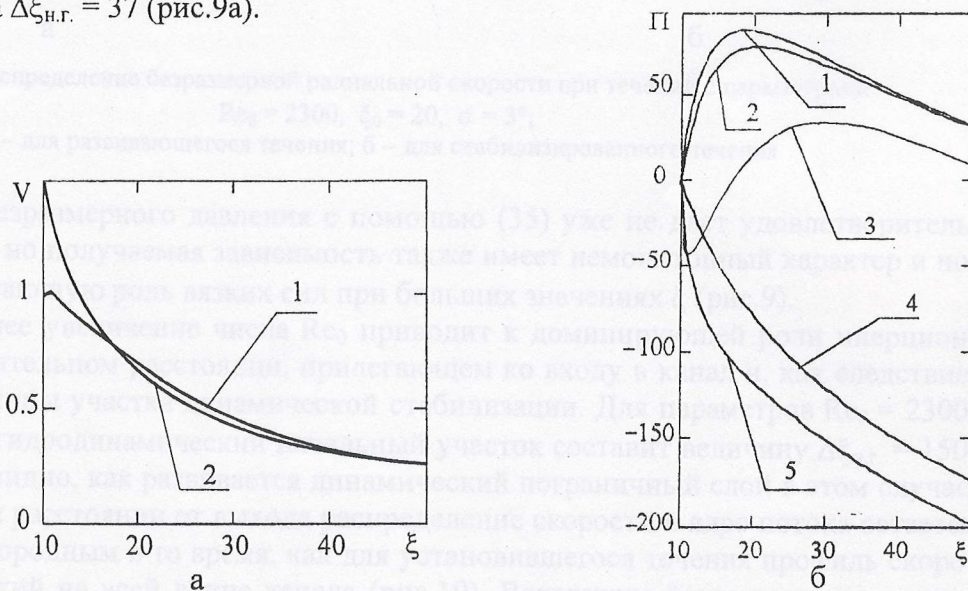


Рис. 9. Распределение вдоль течения с параметрами  $Re_0 = 425$ ,  $\xi_0 = 10$  и  $\alpha = 15^\circ$

- а – безразмерной радиальной скорости на срединной поверхности канала; б – оценка безразмерного давления по (35) с помощью  $\Pi_1$  – 1; 2 –  $\Pi_2$ ; 3 – безразмерного давления для неустановившегося течения;
- 4 – для стабилизированного течения; 5 – потери безразмерного давления за счет трения на границах

У входа в канал профиль скорости практически прямоугольный, вследствие чего здесь происходит значительное уменьшение безразмерного давления из-за трения на границе канала (рис.9б). По мере развития профиля скорости вдоль течения напряжение сдвига на границах канала снижается, и основную роль начинают играть инерционные силы. Уменьшение скорости вдоль канала вызывает уменьшение динамического давления в жидкости и, как следствие, приводит к уменьшению модуля градиента давления, а затем к изменению знака градиента давления и, в конечном итоге, к повышению давления вдоль течения (рис.9б). Благодаря этому жидкость в рассматриваемом случае течет сначала в сторону отрицательного градиента давления, т.е. в сторону уменьшения давления, но затем, после того, как давление достигает своего минимального значения в пределах канала, даже жидкость течет в сторону увеличения давления (рис.9б). Но вследствие гиперболического закона уменьшения средней скорости вдоль канала [7] ускорение жидкости при больших значениях  $\xi$  уменьшается, что приводит к уменьшению инерционных сил, и силы трения опять приобретают существенное значение. Поэтому градиент давления становится отрицательным и жидкость опять течет в сторону уменьшения давления.

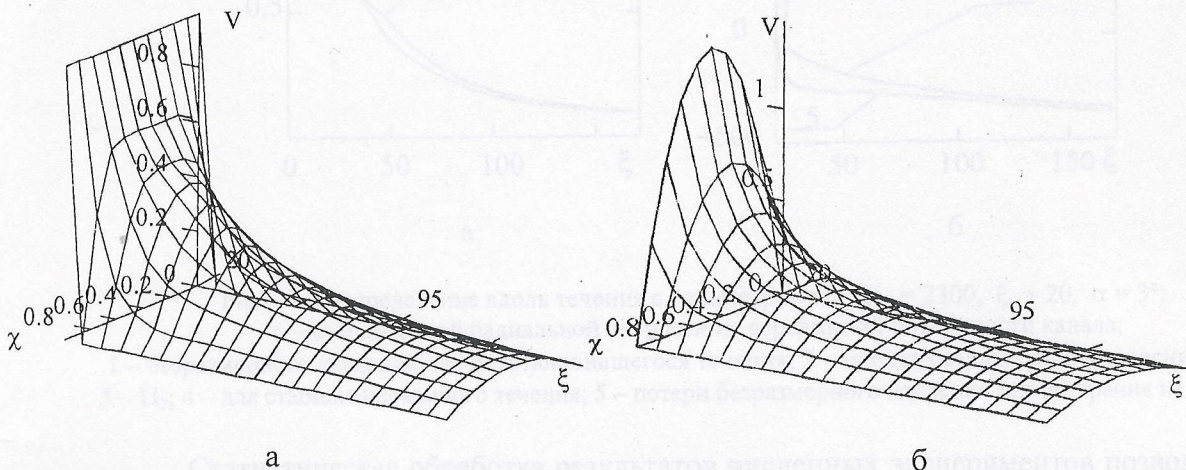


Рис. 10. Распределение безразмерной радиальной скорости при течении с параметрами:  
 $Re_0 = 2300$ ,  $\xi_0 = 20$ ,  $\alpha = 3^\circ$ ;  
 а – для развивающегося течения; б – для стабилизированного течения

Оценка безразмерного давления с помощью (35) уже не дает удовлетворительного результата, но получаемая зависимость также имеет немонотонный характер и показывает возрастающую роль вязких сил при больших значениях  $\xi$  (рис.9).

Дальнейшее увеличение числа  $Re_0$  приводит к доминирующей роли инерционных сил на значительном расстоянии, прилегающем ко входу в канал и, как следствие, к увеличению длины участка динамической стабилизации. Для параметров  $Re_0 = 2300$ ,  $\xi_0 = 10$  и  $\alpha = 3^\circ$  гидродинамический начальный участок составит величину  $\Delta\xi_{н.г.} = 150$ . На рисунке 10а видно, как развивается динамический пограничный слой в этом случае. На значительном расстоянии от выхода распределение скорости в ядре потока остается практически однородным в то время, как для установившегося течения профиль скорости параболический на всей длине канала (рис.10). Вследствие этого радиальная скорость на срединной поверхности канала на некотором расстоянии от входа в канал становится равной радиальной скорости при установившемся течении (рис.11), в то время как динамический пограничный слой еще не достиг середины канала. При даль-

нейшем течении скорость жидкости в центральной области канала превышает скорость при установившемся течении в этой области и они сравниваются только за участком динамической стабилизации (рис.10, 11).

Силы трения в данном случае существенны только вблизи самого входа в канал, где профиль скорости практически стержневой и течение происходит в сторону падения давления, но на очень коротком расстоянии (рис. 11). Дальнейшее же течение происходит в направлении увеличения давления за счет снижения динамического напора потока жидкости (рис.11). Оценить максимальное повышение давления в канале при больших  $Re$  можно с помощью соотношений (32), (33) (рис.11) с точностью до 40%.

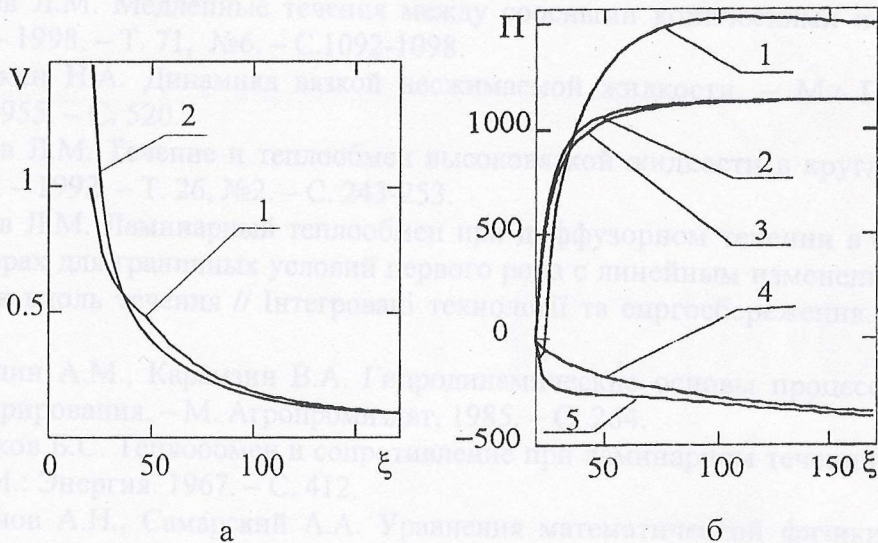


Рис. 11. Распределение вдоль течения с параметрами:  $Re_0 = 2300$ ,  $\xi_0 = 20$ ,  $\alpha = 3^\circ$ :

а – безразмерной радиальной скорости на срединной поверхности канала;

1 – безразмерного давления для неустановившегося течения; 2 – оценка безразмерного давления по  $\Pi_1$ ; 3 –  $\Pi_2$ ; 4 – для стабилизированного течения; 5 – потери безразмерного давления за счет трения на границах

Статистическая обработка результатов численных экспериментов позволила получить вполне приемлемое выражение для приблизительной оценки гидродинамического начального участка для чисел  $Re_0 \geq 10$  и  $\xi_0 \leq 20$ :

$$\Delta \xi_{н.г.} = \xi_{н.г.} - \xi_0 \approx 0.052 Re_0^{0.985} \left( \frac{\xi_0^2 + 15.2 \xi_0 - 10.4}{\xi_0^2 + 18.95 \xi_0 - 15} \right) (\sin \alpha)^{-0.005}, \quad (36)$$

а для  $\xi_0 > 20$  выражение:

$$\Delta \xi_{н.г.} \approx 6.2 \cdot 10^{-4} Re_0^{0.97} (5 \xi_0 - 1 - 1.95 \cdot 10^{-2} \xi_0^2 + 2 \cdot 10^{-5} \xi_0^3) (\sin \alpha)^{0.005}. \quad (37)$$

### Обозначения

$h$  – ширина канала, м;  $P$ ,  $P_0$  – давление текущее и на входе, Па;  $Q$  – объёмный расход,  $m^3/c$ ;  $R$ ,  $R_0$  – координата радиальная и входа в канал, м;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – декартовы координаты, м;  $\alpha$  – половина угла раскрытия конуса, рад;  $\beta$  – постоянная разделения;  $\mu$  – вязкость, Па·с;  $\rho$  – плотность жидкости,  $kg/m^3$ ;  $X$  – поперечная биконическая координата, м;  $Re_0 = \frac{hV_0\rho}{\mu}$  – число Рейнольдса.

Литература

1. Слезкин Н.А. Движение вязкой жидкости в конусе и между двумя конусами // Матем. сборник. – 1935. – Т. 42, №1. – С. 43-64.
2. Литвинов В.Г., Иванова А.И. Задача о движении нелинейно-вязкой среды в осесимметричных каналах // Прикладная механика. – 1994. – Т. 30, №11. – С. 85-90.
3. Яхно О.М., Кривошеев В.С. Особенности гидравлического расчета течений в конических кольцевых каналах // Вестник Национального технического университета Украины “КПИ”. Машиностроение. – Вып. 36. Т. 2. – 1999. – С. 396-375.
4. Ульев Л.М. Медленные течения между соосными коническими поверхностями // ИФЖ. – 1998. – Т. 71, №6. – С.1092-1098.
5. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Госиздат. тех.-теор. лит. 1955. – С. 520.
6. Ульев Л.М. Течение и теплообмен высоковязкой жидкости в круглом конфузоре // ТОХТ. – 1992. – Т. 26, №2. – С. 243-253.
7. Ульев Л.М. Ламинарный теплообмен при диффузорном течении в соосных конических зазорах для граничных условий первого рода с линейным изменением температуры стенок вдоль течения // Інтегровані технології та енергосбереження. – 1999. №4. – С. 45-59.
8. Гольдин А.М., Карамзин В.А. Гидродинамические основы процессов тонкослойного сепарирования. – М. Агропромиздат, 1985. – С. 264.
9. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. – М.: Энергия. 1967. – С. 412.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – С. 724.

УДК 532.5; 678.027

Ульев Л.М.

### РОЗВИТОК ЛАМІНАРНОЇ ДИФУЗОРНОЇ ТЕЧІЇ У КОНІЧНОЇ ЩІЛИНИ ШИРИНА ЯКОЇ СТАЛА ВЕЛИЧИНА

Розв'язана задача стаціонарної просторово несталого дифузорної течії в'язкої рідини у кільцевих конічних каналах ширина яких стала величина. Визначені головні параметри, які впливають на довжину гідродинамічної початкової ділянки. Зроблено дослідження розподілу швидкості та тиснення у каналі. Здобуті апроксимаційні співвідношення для визначення гідродинамічної початкової ділянки.